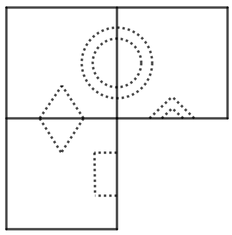
Satakunnan seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailu 4.–8.3.2024 Ratkaisuja

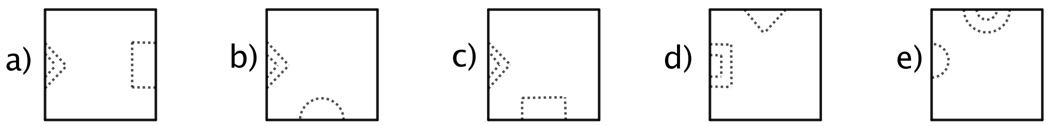
1. Laske 1,08 − 0,99.

a) 0,90 **b)** 0,09 **c)** 9 **d)** 0,08 **e)** 0,8

Ratkaisu. b) 0,09: Suoraan laskemalla saadaan $1{,}08 - 0{,}99 = 0{,}09$.

2. Mikä seuraavista paloista sopii kolon paikalle? Paloja saa kiertää.





Ratkaisu. c) Vain paloissa a ja c on oikeat kuviot. Pala a ei sovi, sillä siinä kuviot eivät ole peräkkäisillä sivuilla. Pala c sopii; kierretään sitä 90° vastapäivään.

3. Ensimmäisenä päivänä lämpötila on −2 °C. Toisena päivänä se laskee viisi astetta ja kolmantena nousee kolme astetta. Mikä on lämpötila näiden muutosten jälkeen?

a) 0 °C **b)** +2 °C **c)** −2 °C **d)** +4 °C **e)** −4 °C

Ratkaisu. e) −4 °C: Koska lämpötila laskee ensin viisi astetta ja sitten nousee kolme, niin kahden jälkimmäisen päivän muutos on $-5 + 3 = -2$ astetta. Koska on $-2 - 2 = -4$, niin oikea vastaus on −4 °C.

4. Yksi T-paita maksaa 12 euroa, mutta voimassa on myös alennus, jonka mukaan aina kolmesta paidasta yksi on ilmainen. Ostetaan kahdeksan T-paitaa. Kuinka paljon ostokset maksavat yhteensä?

a) 24 e **b)** 36 e **c)** 60 e **d)** 72 e **e)** 96 e

Ratkaisu. d) 72: Koska joka kolmas T-paita on ilmainen, niin kolmas ja kuudes T-paita saatiin ilmaiseksi. Maksetaan siis vain kuudesta T-paidasta eli yhteishinta on $6 \cdot 12$ e $= 72$ e.

5. Digitaalinen kello ilmoittaa ajan minuutin tarkkuudella 24 h tuntimuodossa. Esimerkiksi se voi näyttää 20:31. Mikä on suurin mahdollinen numeroiden summa tässä digitaalisessa kellossa? Esimerkiksi kellonajan 20:31 numeroiden summa on $2 + 0 + 3 + 1 = 6$.

a) 6 **b)** 19 **c)** 20 **d)** 24 **e)** 36

Ratkaisu. d) 24**:** Pyritään saamaan mahdollisimman suuret numerot.

Aloitetaan minuuteista. Suurin minuuttien yksikkömäärä on yhdeksän. Kymmenten minuuttien kohdalla numero on taas korkeintaan viisi. 59 minuuttia on kellossa täysin käypä aika.

Siirrytään tunteihin. Kymmeniä tunteja merkitsevä numero on korkeintaan kaksi. Tällöin kuitenkin ykkösiä merkitsevä numero tunneissa on korkeintaan neljä, jolloin tunneista saatava summa on korkeintaan $2 + 4 = 6$. Huomataan, että klo 19 tuottaa suuremman summan, sillä on $1 + 9 = 10$. Näin ollen kymmeniä merkitsevän numeron on oltava korkeintaan 1. Koska ykkösiä merkitsevä numero tunneissa on joka tapauksessa korkeintaan yhdeksän, ja klo 19 on olemassa oleva aika, niin 19 on haluttu tuntien ajankohta.

Todetaan vielä, että 19:59 on olemassa oleva aika. Näin ollen kysytty summa on $1 + 9 + 5 + 9 = 24$.

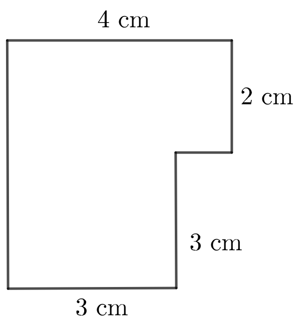
6. Kolme lasta jakaa sinisiä ja punaisia karkkeja. Kukin lapsi saa yhtä monta punaista karkkia. Siniset karkit eivät kuitenkaan jakaudu tasan, vaan yksi lapsista saa yhden sinisen karkin vähemmän kuin muut. Osoittautuu, että yksi seuraavista luvuista oli sinisten ja punaisten karkkien alkuperäinen yhteismäärä. Mikä?

a) 32 **b)** 34 **c)** 39 **d)** 40 **e)** 42

Ratkaisu. a) 32**:** Punaisia karkkeja on oltava kolmella jaollinen määrä, koska ne voitiin jakaa tasan lasten kesken. Sen sijaan sinisten karkkien jakojäännöksen kolmella jaettaessa on oltava kaksi, sillä yksi kolmesta lapsesta sai muita vähemmän sinisiä karkkeja. Näin ollen myös karkkien kokonaismäärän on oltava sellainen luku, että kolmella jaettaessa sen jakojäännös on kaksi. (Tämä olisi voitu nähdä myös siitä, että karkit loppuivat, kun yhdelle oli tullut yksi karkki vähemmän kuin muille.) Ainoa vaihtoehdoista, joka toteuttaa tämän ehdon, on 32, sillä on

$$32 = 3 \cdot 10 + 2, \quad 34 = 11 \cdot 3 + 1, \quad 39 = 13 \cdot 3, \quad 40 = 13 \cdot 3 + 1, \quad 42 = 14 \cdot 3.$$

7. Mikä on kuvion piiri? Kaikki kuvion kulmat ovat joko 90° tai 270°.



a) 12 cm **b)** 17 cm **c)** 18 cm
d) 20 cm **e)** 24 cm

Ratkaisu. c) 18 cm**:** Oikealla olevan sivun pituus on 2 cm + 3 cm = 5 cm. Koska kaikki kulmat ovat joko 90° tai 270°, niin vasemmalla oleva sivu on oikealla olevan sivun kanssa yhdensuuntainen ja myös sen pituus on 5 cm. Vastaavalla päättelyllä voidaan todeta, että keskellä olevan vaakasuoran sivun pituus on ylhäällä olevan pidemmän sivun ja alhaalla olevan lyhyen sivun pituuksien erotus eli 4 cm − 3 cm = 1 cm. Kuvion piiri on siis

$$4 \text{ cm} + 2 \text{ cm} + 1 \text{ cm} + 3 \text{ cm} + 3 \text{ cm} + 5 \text{ cm} = 18 \text{ cm}.$$

8. Punahilkka on 50 metrin päässä isoäidin mökiltä ja kulkee suoraan mökkiä kohti. Aina, kun Punahilkka kulkee kahdeksan metriä, ilmestyy susi puun takaa pelottelemaan Punahilkkaa ja Punahilkka peräätyy suoraan taaksepäin kaksi metriä. Susi menee tämän jälkeen piiloon ja Punhahilkka jatkaa matkaansa jälleen suoraan mökkiä kohti, kunnes taas hänen kuljettuaan kahdeksan metriä susi ilmestyy pelottelemaan häntä.

Kuinka monta metriä Punahilkka joutuu kävelemään tällä 50 metrin matkalla ennen kuin hän pääsee isoäidin mökille?

a) 64 m **b)** 68 m **c)** 72 m **d)** 76 m **e)** 82 m

Ratkaisu. e) 82 m: Viimeisiä metrejä lukuun ottamatta aina, kun Punahilkka on edennyt kuusi metriä, hän on todellisuudessa kävellyt $8 + 2 = 10$ metriä (kahdeksan eteen ja kaksi taakse). Koska $50 = 48 + 2 = 8 \cdot 6 + 2$, niin Punahilkka kulkee tällaisia kymmenen metrin pätkiä kahdeksan ja lopuksi hän kävelee kaksi metriä ilman pelottelua. Siis yhteensä matkaa kertyy $8 \cdot 10 + 2 = 82$ metriä.

9. Mikä seuraavista viidestä murtoluvuista on suurin?

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{5}{7}$ **c)** $\frac{3}{5}$ **d)** $\frac{7}{9}$ **e)** $\frac{9}{11}$

Ratkaisu. e) $\frac{9}{11}$: Huomataan tutkittavissa murtoluvuissa säännönmukaisuutta: jos minkä tahansa muun luvun kuin $\frac{1}{2}$ osoittajaan lisätään kaksi, saataisiin luvuksi 1. Vastaavasti, kun ajatellaan lukua $\frac{1}{2}$ muodoss $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, niin tämä ominaisuus pätee myös. Tutkitaan, millä tämä kakkosen lisäys osoittajaan on pienin luku eli mikä luvuista on lähimpänä ykköstä ja täten suurin. On

$$1 - \frac{2}{4} = \frac{2}{4}, \quad 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}, \quad 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}, \quad 1 - \frac{7}{9} = \frac{2}{9} \quad \text{ja} \quad 1 - \frac{9}{11} = \frac{2}{11}.$$

Kuten todettu, näissä erotuksissa on samat osoittajat, mutta eri nimittäjät. Luvun $\frac{2}{11}$ nimittäjä on suurin eli se on pienin luku. Näin ollen näistä luvuista $\frac{9}{11}$ on suurin.

10. Kuinka monta sellaista positiivista kokonaislukua, jotka ovat enintään 1000 ja joissa esiintyy numero 3 ainakin kerran, on olemassa? Esimerkiksi 13 on tällainen luku.

a) 243 **b)** 244 **c)** 271 **d)** 300 **e)** 700

Ratkaisu. c) 271: Välillä $1 - 9$ tällaisia lukuja on yksi; luku kolme. Välillä $11 - 99$ on jokaisessa kymmenessä yksi sellainen luku, jossa on numero kolme ykkösten paikalla sekä yhdeksän muuta sellaista lukua, joissa on kymmenten paikalla kolme. Siis välillä $11 - 99$ on $9 + 9 = 18$ kysytynlaista lukua.

Välillä $100 - 999$ jokaisessa sadassa (9 kpl) on edellisen kappaleen nojalla 19 sellaista lukua, joissa on ykkösten tai kymmenten paikalla numero 3. Tämän lisäksi on vielä $100 - 19 = 1$ sellaista lukua, joissa satojen paikalla on kolme, mutta ykkösten tai kymmenten paikalla ei ole numeroa kolme. Siis välillä $100 - 999$ yhteensä $9 \cdot 19 + 81 = 171 + 81 = 252$ luvussa on numero kolme.

Luvussa 1000 ei ole numeroa kolme. Näin ollen yhteensä

$$1 + 18 + 252 = 19 + 252 = 271$$

kysytyistä luvuista on numero kolme.

11. Laske niiden kokonaislukujen, jotka ovat vähintään -10 ja enintään 10, tulo.

a) 0 **b)** $-64\,800$ **c)** $64\,800$ **d)** $-25\,401\,600$ **e)** $25\,401\,600$

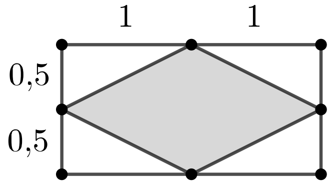
Ratkaisu. a) 0: Luku nolla on mukana tulossa. Kun mikä tahansa muu kokonaisluku kerrotaan nollalla, tulokseksi tulee nolla. Täten tulo on nolla.

12. Suorakulmion korkeus on 1 ja leveys 2. Sen sisälle muodostetaan nelikulmio yhdistämällä suorakulmion sivujen keskipisteet. Mikä on muodostuneen nelikulmion pinta-ala?

a) 0,25 **b)** 0,5 **c)** 0,75 **d)** 1 **e)** 1,25

Ratkaisu. d) 1: Nelikulmio jakaa suorakulmion neljään suorakulmaiseen kolmioon, joista kunkin toisen kateetin pituus on $2/2 = 1$ ja toisen $1/2 = 0{,}5$ (ks. kuva). Nelikulmion pinta-ala siis saadaan, kun suorakulmiosta vähennetään näiden kolmioiden pinta-alat. Kysytty pinta-ala on siis

$$2 \cdot 1 - 4 \cdot \frac{1 \cdot 0{,}5}{2} = 2 - 2 \cdot 0{,}5 = 2 - 1 = 1.$$



13. Aino sanoo, että Eino valehtelee. Eino sanoo, että Leo valehtelee. Leo sanoo, että Olivia valehtelee. Olivia sanoo, että Leo valehtelee. Väinö sanoo, että kaikki puhuvat totta. Kuinka moni viidestä lapsesta puhuu totta?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Ratkaisu. b) 2: Koska Leo sanoo, että Olivia valehtelee ja Olivia sanoo, että Leo valehtelee, täsmälleen toisen heistä on valehdeltava. Näin ollen myös Väinö valehtelee aina.

Jos Leo valehtelee, niin Olivia ja Eino puhuvat totta sekä Aino valehtelee. Näin ollen kaksi lapsista puhuu totta.

Jos Leo puhuu totta, niin Olivia ja Eino valehtelevat, mutta Aino puhuu totta. Tässäkin tapauksessa kaksi lapsista puhuu totta.

14. Erään kuution ja neliön sivujen pituudet ovat positiivisia kokonaislukuja senttimetreissä. Kun lisätään kuution tilavuudesta ilman yksikköä cm^3 saatava luku neliön pinta-alasta ilman yksikköä cm^2 saatavaan lukuun, niin summaksi saadaan 73. Esimerkiksi siis, jos kuution tilavuus olisi 1 cm^3 ja neliön pinta-ala olisi 4 cm^2, niin laskettaisiin $1 + 4 = 5$, mutta tämä pari ei muodosta haluttua summaa. Kuinka monta haluttua kuution ja neliön paria on olemassa?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** 4

Ratkaisu. b) 1: Kuution sivun pituus on korkeintaan 4, sillä pätee $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 > 73$. Koska sivujen pituudet ovat positiivisia kokonaislukuja, sen täytyy olla vähintään yksi. Käydään läpi eri vaihtoehdot.

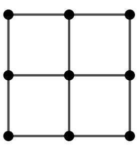
Jos kuution sivun pituus on 1, niin neliön pinta-alan tulee olla $73 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = 72$. Kuitenkin on $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 < 72 < 125 = 5 \cdot 5 \cdot 5$ eli 72 ei voi olla minkään neliön, jonka sivujen pituudet ovat kokonaislukuja, pinta-ala. Siis kuution sivun pituus ei voi olla 1.

Jos kuution sivun pituus on 2, niin neliön pinta-alan tulee olla $73 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = 65$. Tämäkin on lukujen 64 ja 125 välissä, joten kyseessä ei voi tässäkään tapauksessa olla neliön, jonka sivujen pituudet ovat kokonaislukuja, pinta-ala.

Jos kuution sivun pituus on 3, niin neliön pinta-alan tulee olla $73 - 3 \cdot 3 \cdot 3 = 46$. Kuitenkin on $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 > 46 > 27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$ eli myöskään 46 ei voi olla minkään neliön, jonka sivujen pituudet ovat kokonaislukuja, pinta-ala. Siis kuution sivun pituus ei voi olla myöskään 3.

On enää tutkittava tapaus, jossa kuution sivun pituus on 4. Tällöin neliön pinta-ala on $73 - 4 \cdot 4 \cdot 4 = 9$. Huomataan, että $3 \cdot 3 = 9$ eli neliön sivun pituus on 3. Ainoa mahdollinen kuutio-neliöyhdistelmä on siis sellainen, jossa kuution sivun pituus on neljä ja neliön kolme.

15. Kuinka monta sellaista kolmiota, joiden kärjet ovat kuvassa olevia pisteitä, voidaan muodostaa? Kaksi kolmiota ovat erit, jos niillä on ainakin yksi eri kärkipiste.



a) 14 **b)** 20 **c)** 40 **d)** 76 **e)** 108

Ratkaisu. d) 76: Tapa 1) Kolmio muodostuu, kun valitaan kolme pistettä, jotka eivät kaikki ole samalla suoralla. Tutkitaan, kuinka monella eri tavalla nämä pisteet voidaan valita. Tämä on sama asia kuin se, että valittaisiin eri tavoin kolme pistettä ja poistettaisiin niistä ne, joissa pisteet ovat samalla suoralla.

Yhdeksestä pisteestä voi valita yhden yhdeksällä eri tavalla. Seuraavalle pisteelle on kahdeksan eri vaihtoehtoa (kaikki muut paitsi jo valittu piste) ja kolmannelle seitsemän eri vaihtoehtoa. Havaitaan kuitenkin, ettei ole väliä, missä järjestyksessä pisteet valittiin, silti kyseessä on sama kolmio, kun kärjet ovat samat. Kolme pistettä on voitu valita $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ eri järjestyksessä, sillä ensimmäiseksi valitulle pisteelle on kolme vaihtoehtoa, toiselle kaksi ja kolmannelle yksi. Näin ollen siis yhdeksän pisteen joukosta voidaan valita kolme

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 12 \cdot 7 = 84$$

eri tavalla. Täsä on kuitenkin vielä poistettava ne kolmen pisteen joukot, joissa kaikki pisteet ovat samalla suoralla.

Sekä vaaka- että pystysuoraan kolmen pisteen janoja on kumpiakin kolme. Tämän lisäksi kummallakin diagonaalilla on kolme pistettä samalla suoralla. Kaiken kaikkiaan kysyttyjä kolmioita on siis $84 - 2 \cdot 3 - 2 = 76$.

Tapa 2) Kuten edellisessä ratkaisutavassa, huomataan, että kolmio muodostuu, kun valitaan kolme pistettä, jotka eivät kaikki ole samalla suoralla. Tutkitaan, kuinka monella eri tavalla nämä pisteet voidaan valita.

Jos kaksi kärkeä on ylimmältä riviltä, niin kolmas kärki voi olla mikä tahansa jäljelle jäävästä kuudesta pisteestä, jotka eivät ole ylimmällä rivillä. Koska kaksi kärkeä voidaan valita samalta riviltä kolmella tavalla (vasen ja keskimmäinen, vasen ja oikea tai vasen ja oikea piste), niin on olemassa $3 \cdot 6 = 18$ sellaista kolmiota, joilla on kaksi kärkeä ylimmällä rivillä. Vastaavasti on olemassa 18 sellaista kolmiota, joilla on kaksi kärkeä keskimmäisellä rivillä ja 18 sellaista, joilla on kaksi kärkeä kolmannella rivillä. Yhteensä siis sellaisia kolmioita, joilla on kaksi kärkeä samalla rivillä, on $3 \cdot 18 = 54$.

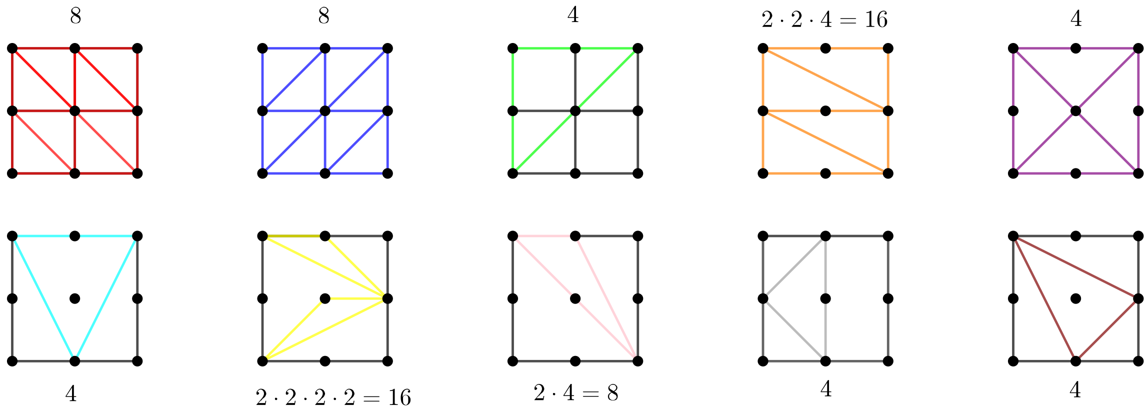
Kolmion kahden kärjen ei kuitenkaan tarvitse välttämättä olla samalla rivillä. Tutkitaan siis vielä, kuinka monta sellaista kolmiota, jonka mitkään kärjet eivät ole samalla rivillä, on olemassa.

Tutkitaan ensin sellaisten kolmioiden määrää, joilla on kaksi kärkeä samassa sarakkeessa, mutta ei kuitenkaan yhtään kärkeä samalla rivillä. Tarkastellaan ensin vasemmanpuoleisinta saraketta. Nyt kolmannen kärjen on oltava jompi kumpi niistä kahdesta pisteestä, jotka eivät sijaitse samassa rivissä tai sarakkeessa näiden kahden pisteen kanssa. Samassa sarakkeessa olevat pisteet voidaan valita kolmella eri tavalla eli sellaisia kolmioita, joiden kaksi kärkeä on ensimmäisessä sarakkeessa ja kolmas näiden kanssa eri sarakkeessa ja eri riveissä, on $3 \cdot 2 = 6$. Koska sarakkeita on kaikkiaan kolme, saadaan niiden kolmioiden lukumääräksi, joilla on kaksi kärkeä samassa sarakkeessa, mutta ei yhtään kärkeä samalla rivillä, $3 \cdot 6 = 18$.

Vielä on löydettävä niiden kolmioiden lukumäärä, joilla ei ole yhtään kärkeä samassa sarakkeessa tai rivissä. Näin ollen kunkin pisteen on oltava eri rivistä tai sarakkeesta. Ylimmältä riviltä voidaan valita piste kolmella eri tavalla. Toiselta riviltä taas kahdella eri tavalla ja alimmalta ainoa piste, joka ei ole edellisten kanssa samassa sarakkeessa. Näitä on $3 \cdot 2 = 6$ kappaletta. Tässä on kuitenkin mukana myös ne kolmiot, joiden kaikki kärjet ovat diagonaaleilla. Näitä on kaksi kappaletta (diagonaalit).

Kaiken kaikkiaan kysyttyjä kolmioita on siis $54 + 18 + 6 - 2 = 76$ kappaletta.

Tapa 3) Luetellaan kaikki kolmiot. Ensinnäkin, voidaan muodostaa kahdeksan pientä suorakulmaista kolmiota, joiden kaksi kärkeä ovat samalla rivillä peräkkäiset pisteet ja kolmas kärki oikeanpuoleisen kärjen alla (kuvassa punaisella). Vastaavasti voidaan muodostaa kahdeksan sellaista kolmiota, joissa hypotenuusa on viistosti toiseen suuntaan (siniset kolmiot).



Toisaalta voidaan muodostaa neljä vihreää tasakylkisiä suorakulmaista kolmiota kolmiota, joiden kateettien pituudet ovat kaksi (ks. vihreät kolmiot) kiertämällä neliötä ympäri. Muita sellaisia tasakylkisiä suorakulmaisia kolmioita, joiden kateetit ovat kuvion sivujen kanssa yhdensuuntaiset, ei voi olla, sillä tällöin kateetin maksimipituus on kaksi. Huomataan kuitenkin, ettei suorakulmaisten kolmioiden kateettien tarvitse välttämättä olla yhtä pitkiä tai yhdensuuntaiset kuvion sivuja vastaan.

Sellaisten suorakulmaisten kolmioiden, joiden kateetit ovat erimittaiset, mutta kuitenkin kuvion sivujen kanssa yhdensuuntaiset, toisen kateetin on oltava pituudeltaan yksi ja toisen kaksi, koska nämä ovat ainoat vaihtoehdot pituuksille. Nämä saadaan oranssien kolmioiden tapaan ottamalla huomioon, että hypotenuusat voivat olla myös toiseen suuntaan vinossa tai kuvio pystyssä. Yhteensä siis näitä kolmioita on $2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$ kappaletta.

Jos kyseessä on suorakulmainen kolmio, jonka kateetit eivät ole kuvion sivujen kanssa yhdensuuntaiset, on kateettien oltava yhdensuuntaisia diagonaalien kanssa (violetit ja harmaat kolmiot). Näitä on yhteensä $4 + 4 = 8$ kappaletta.

On vielä tutkittava kuinka monta sellaista kolmiota löydetään, jotka eivät ole suorakulmaisia. Käydään läpi erilaisia tapauksia, jotka ovat jääneet puuttumaan edellisistä tapauksista. Huomataan, että sellaiset kolmiot, joiden kaksi kärkeä ovat kulmissa ja yksi niiden keskellä vastakkaisella reunalla (vaaleansiniset kolmiot), ovat vielä laskematta. Näitä on neljä kappaletta. Näiden kanssa samanhenkisiä ovat vaaleanpunaiset kolmiot, joissa kaksi kärkeä onkin peräkkäin samalla rivillä tai sarakkeella ja kolmas vastakkaiselta sivulta niin, ettei se ole edellisten kanssa samalla sarakkeella tai rivillä. Kaksi peräkkäistä pistettä voidaan valita kultakin sivulta kahdella eri tavalla ja sivuja on neljä, joten kaiken kaikkiaan näitä kolmioita on $2 \cdot 4 = 8$ kappaletta.

Keltaiset kolmiot ovat litistettyjä versioita vaaleanpunaisista. Jälleen peräkkäiset pisteet voidaan valita kahdella tavalla. Lisäksi kolmiot voivat muodostua ”ylhäältä alas” (peräkkäiset pisteet ylemmältä riviltä) tai alhaalta ylös, vaakasuorassa vastaavasti ja jokaisessa tapauksessa on ylempi ja alempi/oikeanpuoleisempi ja vasemmanpuoleisempi alue muodostaa kolmio. Näitä kolmioita on siis $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ kappaletta.

Vielä on jäljellä ne kolmiot, joiden kärjet eivät ole samoilla riveillä tai sarakkeilla (ruskeat). Näitä on neljä kappaletta.

Voidaan varmistua, että kaikki tapaukset on käyty läpi esimerkiksi samantapaisella systemaattisella ajattelulla kuin ratkaisutavassa 1. Yhteensä kolmioita on siis 76 kappaletta.