Baltijos kelias 2006

Turku, 2006 lapkričio 3

Version: Lithuanian

1. Realiųjų skaičių seka $a_1, a_2, a_3, \ldots$ yra tokia, kad

$$a_n = a_{n-1} + a_{n+2}$$

su visais $n = 2, 3, 4, \ldots$. Kiek daugiausiai iš eilės einančių jos narių gali būti teigiami?

2. Duota, kad $a_1 + a_2 + \cdots + a_{59} = 0$, kur $a_i \in [-2, 17]$, $i = 1, 2, \ldots, 59$. Įrodykite, kad

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{59}^2 \leq 2006.$$

3. Įrodykite, kad kiekvieną polinomą $P(x)$ su realiaisiais koeficientais galima išreikšti suma

$$P(x) = (P_1(x))^3 + (P_2(x))^3 + \ldots + (P_m(x))^3,$$

kur $P_1(x)$, $P_2(x)$, …, $P_m(x)$ yra polinomai su realiaisiais koeficientais.

4. Neneigiami realieji skaičiai a, b, c, d, e ir f tenkina sąlygą $a+b+c+d+e+f = 6$. Raskite reiškinio $abc+bcd+cde+def+efa+fab$ didžiausią reikšmę ir visus šešetus (a, b, c, d, e, f), su kuriais ta didžiausia reikšmė įgyjama.

5. Profesorius savo paskutinę knygą paskyrė specialiai aritmetinei operacijai $*$. Operacija atliekama su bet kuriais dviem sveikaisiais skaičiais a ir b, o jos rezultatas, žymimas simboliu $a * b$, taip pat yra sveikasis skaičius. Operacijoms, su visais $x, y \in \mathbb{Z}$ galioja dvi aksiomos:

a) $x * (x * y) = y$;

b) $(x * y) * y = x$.

Knygoje randame du teiginius:

1. Operacija $*$ yra komutatyvi: $x * y = y * x$ su visais $x, y \in \mathbb{Z}$.
2. Operacija $*$ yra asociatyvi: $(x * y) * z = x * (y * x)$ su visais $x, y \in \mathbb{Z}$.

Kurie teiginiai yra teisingi?

6. Raskite, kiek daugiausiai natūraliųjų skaičių gali būti aibėje, pasižyminčioje šiomis savybėmis:

1. Kiekvieno aibės skaičiaus skaitmenys skirtingi.
2. Skaičių skaitmenys yra iš aibės $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
3. Skaitmenys eina didėjimo tvarka.
4. Bet kurie du aibės elementai turi bendrą skaitmenį.
5. Nėra skaitmens, priklausančio visiems tos aibės skaičiams.

7. Fotografas atnešė pobūvio, kuriame dalyvavo 10 dalyvių, nuotraukas. Kiekvieną iš visų galimų 45 pobūvio dalyvių porų galima rasti vienintelėje nuotraukoje, o kiekvienoje nuotraukoje yra arba du, arba trys asmenys. Kiek mažiausiai galėjo būti nuotraukų?

8. Direktorius sužinojo, kad jo kolektyve egzistuoja 6 slapti rateliai, kiekvienas iš kurių turi 3 narius. Įrodykite, kad direktorius gali padalyti kolektyvą į du padalinius taip, kad joks slaptas ratelis visas nepakliūtų į vieną iš padalinių.

9. Kiekvienoje taisyklingojo penkiakampio viršūnėje parašyta po realųjį skaičių. Kartojame tokią procedūrą: imame du gretimose viršūnėse esančius skaičius ir abu juos pakeičiame jų aritmetiniu vidurkiu. Pradinėje padėtyje visų penkiakampio viršūnių skaičių suma lygi 0. Ar teisingas toks teiginys, kad iš kiekvieno tokio pradinio skaičių rinkinio visada galima gauti 5 skaičių rinkinį, kurio visi skaičiai yra nuliai?

10. Į lentelės 30×30 langelius įrašyti 162 pliusai ir 144 minusai taip, kad kiekvienoje eilutėje ir kiekviename stulpelyje yra ne daugiau kaip 17 ženklų. Kiekvienam lentelės pliusui suskaičiuojame tos eilutės minusų skaičių, o kiekvienam lentelės minusui suskaičiuojame to stulpelio pliusų skaičių. Raskite, kokia didžiausia gali būti visų tų skaičių suma.

11. Trikampio aukštinės yra 12, 15 ir 20. Koks yra trikampio plotas?

12. Trikampio ABC kraštinės AB vidurio taškas B_1, kraštinės AC vidurio taškas C_1. Tegul P yra apie trikampius ABC_1 ir AB_1C apibrėžtų apskritimų susikirtimo taškas, nesutampantis su A. Tegul P_1 yra tiesės AP ir apie trikampį AB_1C_1 apibrėžto apskritimo susikirtimo taškas, nesutampantis su A. Įrodykite, kad $2AP = 3AP_1$.

13. Taškai D ir E yra atitinkamai trikampio ABC kraštinių AB ir AC taškai. Tiesės BE ir CD kertasi taške F. Įrodykite, kad jei

$$BC^2 = BD \cdot BA + CE \cdot CA,$$

tai taškai A, D, F, E priklauso vienam apskritimui.

14. Sferos paviršiuje pažymėti 2006 taškai. Įrodykite, kad paviršių galima padalinti į 2006 lygias dalis taip, kad kiekvienoje dalyje būtų lygiai vienas iš tų taškų.

15. Trikampio ABC pusiaukraštinės kertasi taške M. Tiesė t, einanti per tašką M, kerta trikampio apibrėžtinį apskritimą taškuose X ir Y taip, kad A ir C yra toje pačioje tiesės t pusėje. Įrodykite, kad $BX \cdot BY = AX \cdot AY + CX \cdot CY$.

16. Ar egzistuoja tokie 4 skirtingi natūralieji skaičiai, kad bet kurių dviejų iš jų sandauga, sudėta su 2006, būtų tikslus kvadratas?

17. Raskite visus tokius natūraliuosius skaičius n, kad $3^n + 1$ dalytųsi iš n^2.

18. Natūraliojo skaičiaus n laipsnio $n^{(n^n)}$ paskutinį skaitmenį pažymėkime a_n. Įrodykite, kad seka (a_n) yra periodinė, ir nustatykite mažiausio periodo ilgį.

19. Ar egzistuoja tokia natūraliųjų skaičių seka $a_1, a_2, a_3, \ldots$, kad su bet kuriuo n bet kurių n paeiliui paimtų narių suma dalytųsi iš n^2?

20. 12-ženklis natūralusis skaičius, sudarytas tik iš skaitmenų 1, 5 ir 9, dalijasi iš 37. Įrodykite, kad jo skaitmenų suma nėra lygi 76.

Sprendimo laikas $4\frac{1}{2}$ valandos. Už kiekvieną uždavinį 5 taškai.