Baltic Way 2016
5. November 2016, Oulu, Finnland
Version: Deutsch

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden. Während der ersten 30 Minuten können Fragen gestellt werden. Es sind nur Schreib- und Zeichenwerkzeuge erlaubt.

1. Ermitteln Sie alle Paare (p, q) von Primzahlen mit $p^3 - q^5 = (p+q)^2$.

2. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

a) Für alle $k \geq 2$ enthält jede Folge von k aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen eine Zahl, die durch keine Primzahl kleiner als k teilbar ist.

b) Für alle $k \geq 2$ enthält jede Folge von k aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen eine Zahl, die teilerfremd zu allen anderen Zahlen der Folge ist.

3. Für welche der ganzen Zahlen $n = 1, 2, \dots, 6$ hat die Gleichung $a^n + b^n = c^n + n$ eine Lösung in ganzen Zahlen?

4. Seien n eine positive ganze Zahl und a, b, c, d ganze Zahlen mit $n \mid a+b+c+d$ und $n \mid a^2+b^2+c^2+d^2$. Zeigen Sie, dass dann $n \mid a^4+b^4+c^4+d^4+4abcd$ gilt.

5. Es sei $p > 3$ eine Primzahl mit $p \equiv 3 \pmod 4$. Für eine gegebene positive ganze Zahl a_0 ist die ganzzahlige Folge $a_0, a_1, \dots$ durch $a_n = a_{n-1}^{2^n}$ für alle $n = 1, 2, \dots$ definiert. Beweisen Sie: Es ist möglich, a_0 so zu wählen, dass für jede positive ganze Zahl N die Teilfolge $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \dots$ nicht konstant modulo p ist.

6. Die Menge $\{1, 2, \dots, 10\}$ wird in drei Teilmengen A, B und C zerlegt. Für jede der Teilmengen werden jetzt die Summe ihrer Elemente, das Produkt ihrer Elemente sowie die Summe der Ziffern ihrer Elemente berechnet. Ist es möglich, dass nur A die größte Summe der Elemente, nur B das größte Produkt der Elemente und nur C die größte Summe der Ziffern der Elemente besitzt?

7. Ermitteln Sie alle positiven ganzen Zahlen n, die für jede reelle Zahl x die Ungleichung

$$3x^n + n(x+2) - 3 \geq nx^2$$

erfüllen.

8. Bestimmen Sie alle reellen Zahlen a, für die es eine nichtkonstante Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, die für alle $x \in \mathbb{R}$ die folgenden beiden Gleichungen erfüllt.

i) $f(ax) = a^2 f(x)$

ii) $f(f(x)) = a\, f(x)$

9. Ermitteln Sie alle Quadrupel (a, b, c, d) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen.

$$\begin{array}{rcrcr} a^3 & + & c^3 & = & 2 \\ a^2b & + & c^2d & = & 0 \\ b^3 & + & d^3 & = & 1 \\ ab^2 & + & cd^2 & = & -6 \end{array}$$

10. Es seien $a_{0,1}, a_{0,2}, \ldots, a_{0,2016}$ positive reelle Zahlen. Weiterhin seien für $n \geq 0$ und $1 \leq k < 2016$

$$a_{n+1,k} = a_{n,k} + \frac{1}{2a_{n,k+1}} \quad \text{und} \quad a_{n+1,2016} = a_{n,2016} + \frac{1}{2a_{n,1}}$$

definiert. Beweisen Sie, dass dann $\max\limits_{1\leq k\leq 2016} a_{2016,k} > 44$ gilt.

11. Eine Menge A besteht aus 2016 positiven ganzen Zahlen. Sämtliche Primfaktoren dieser Zahlen sind kleiner als 30. Beweisen Sie, dass A vier verschiedene Elemente a, b, c und d enthält, deren Produkt $abcd$ eine Quadratzahl ist.

12. Gibt es ein (nicht notwendigerweise konvexes) Sechseck mit den Seitenlängen 1,2,3,4,5,6 (nicht notwendigerweise in dieser Reihenfolge), das sich aus

a) 31
b) 32

gleichseitigen Dreiecken der Seitenlänge 1 zusammensetzen lässt?

13. Auf einer Tafel stehen n Einsen. Ein Zug besteht darin, zwei Zahlen durch zwei Kopien ihrer Summe zu ersetzen. Nach h Zügen sind alle n Zahlen auf der Tafel gleich m. Beweisen Sie, dass dann $h \leq \frac{1}{2} n \log_2 m$ gilt.

14. Ein Würfel besteht aus 4^3 Einheitswürfeln; jedem dieser Einheitswürfel ist eine ganze Zahl zugeordnet. In jedem Zug wählt man einen der Einheitswürfel und erhöht bei allen Würfeln, die mit dem gewählten eine gemeinsame Seitenfläche besitzen, deren Zahlen um 1. Ist es unabhängig von der Ausgangsituation immer möglich, eine Situation zu erreichen, in der alle 4^3 Zahlen durch drei teilbar sind?

15. Es gibt 2016 Ostseehäfen. Zwischen einigen bestehen Fährverbindungen in beiden Richtungen. Dabei gibt es keine 1062 verschiedene Häfen $C_1, \ldots, C_{1062}$, die durch eine Folge $C_1 - C_2 - \cdots - C_{1062}$ direkter Fährverbindungen verbunden sind. Beweisen Sie: Es existieren zwei disjunkte Mengen A und B von je 477 Häfen, so dass es von keinem Hafen aus A eine direkte Fährverbindung zu einem Hafen aus B gibt.

16. In einem Dreieck ABC seien D und E die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden der Winkel bei C und B mit den Seiten AB bzw. AC. Die Punkte F und G liegen auf der Verlängerung von AB über B hinaus bzw. auf der Verlängerung von AC über C hinaus, so dass $BF = CG = BC$. Zeigen Sie, dass dann $FG \parallel DE$ gilt.

17. $ABCD$ sei ein konvexes Viereck mit $AB = AD$. Weiterhin sei T ein Punkt auf der Diagonalen AC mit $\angle ABT + \angle ADT = \angle BCD$. Zeigen Sie: $AT + AC \geq AB + AD$.

18. Sei $ABCD$ ein Parallelogramm mit $\angle BAD = 60^\circ$, und seien K und L die Mittelpunkte von BC bzw. CD. Bestimmen Sie $\angle ABD$, wenn $ABKL$ ein Sehnenviereck ist.

19. Man betrachte Dreiecke in der Ebene, deren Eckpunkte ganzzahlige Koordinaten haben. Ein solches Dreieck kann *zulässig transformiert* werden, indem einer seiner Eckpunkte parallel zur gegenüberliegenden Seite auf einen anderen Punkt mit ganzzahligen Koordinaten verschoben wird. Beweisen Sie: Je zwei flächengleiche Dreiecke lassen sich durch eine Folge zulässiger Transformationen ineinander überführen.

20. $ABCD$ sei ein Sehnenviereck, in dem AB und CD nicht parallel sind. Sei M der Mittelpunkt von CD und P ein Punkt im Inneren von $ABCD$ mit $PA = PB = CM$. Beweisen Sie, dass sich AB, CD und die Mittelsenkrechte von MP in einem Punkt schneiden.