Baltian tie 2016
5. marraskuuta 2016, Oulu, Suomi
Version: Finnish

Koeaika: $4\frac{1}{2}$ tuntia. Kysymyksiä voi esittää ensimmäisen puolen tunnin aikana.
Vain kirjoitus- ja piirtovälineet ovat sallittuja.

1. Etsi kaikki alkulukuparit (p, q), joille $p^3 - q^5 = (p+q)^2$.

2. Osoita seuraavat väitteet oikeiksi tai vääriksi.

a) Kun $k \geq 2$, jokainen k:n peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun jono sisältää luvun, joka ei ole jaollinen millään lukua k pienemmällä alkuluvulla.

b) Kun $k \geq 2$, jokainen k:n peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun jono sisältää luvun, jolla ei ole yhteisiä tekijöitä minkään jonon toisen luvun kanssa.

3. Millä kokonaisluvuilla $n = 1, \ldots, 6$ yhtälöllä

$$a^n + b^n = c^n + n$$

on kokonaislukuratkaisuja?

4. Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja a, b, c, d kokonaislukuja, joille $n \mid a+b+c+d$ ja $n \mid a^2+b^2+c^2+d^2$. Osoita, että

$$n \mid a^4+b^4+c^4+d^4+4abcd.$$

5. Olkoon $p > 3$ alkuluku, jolle $p \equiv 3 \pmod 4$. Positiivista kokonaislukua a_0 kohden määritetään kokonaislukujen jono $a_0, a_1, \ldots$, jossa $a_n = a_{n-1}^{2^n}$ kaikille $n = 1, 2, \ldots$. Todista, että on mahdollista valita sellainen a_0, että osajono $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ ei ole vakio modulo p millään positiivisella kokonaisluvulla N.

6. Joukko $\{1, 2, \ldots, 10\}$ ositetaan kolmeksi osajoukoksi A, B ja C. Jokaisesta joukosta lasketaan joukon alkioiden summa, joukon alkioiden tulo ja joukon alkioiden numeroiden summa.

Onko mahdollista, että yksin joukolla A on suurin alkioiden summa, yksin joukolla B on suurin alkioiden tulo ja yksin joukolla C on suurin alkioiden numeroiden summa?

7. Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joille

$$3x^n + n(x+2) - 3 \geq nx^2$$

pätee kaikille reaaliluvuille x.

8. Etsi kaikki reaaliluvut a, joille on olemassa funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joka ei ole vakiofunktio ja joka toteuttaa seuraavat kaksi yhtälöä kaikilla $x \in \mathbb{R}$:

i) $f(ax) = a^2 f(x)$ ja

ii) $f(f(x)) = a\, f(x)$.

9. Etsi kaikki reaalilukunelikot (a, b, c, d), jotka toteuttavat samanaikaisesti seuraavat yhtälöt:

$$\begin{cases} a^3 + c^3 = 2 \\ a^2b + c^2d = 0 \\ b^3 + d^3 = 1 \\ ab^2 + cd^2 = -6. \end{cases}$$

10. Olkoot $a_{0,1}$, $a_{0,2}$, ..., $a_{0,2016}$ positiivisia reaalilukuja. Kun $n \geq 0$ ja $1 \leq k < 2016$, asetetaan

$$a_{n+1,k} = a_{n,k} + \frac{1}{2a_{n,k+1}} \quad \text{ja} \quad a_{n+1,2016} = a_{n,2016} + \frac{1}{2a_{n,1}}.$$

Osoita, että $\max\limits_{1 \leq k \leq 2016} a_{2016,k} > 44$.

11. Joukossa A on 2016 positiivista kokonaislukua. Kaikki joukon lukujen alkutekijät ovat pienempiä kuin 30. Todista, että joukossa A on neljä eri lukua a, b, c ja d, joille $abcd$ on neliöluku.

12. Onko olemassa kuusikulmiota (ei välttämättä kupera), jonka sivujen pituudet ovat 1, 2, 3, 4, 5, 6 (ei välttämättä tässä järjestyksessä) ja joka voidaan laatoittaa a) 31:llä b) 32:lla tasasivuisella kolmiolla, joiden sivujen pituudet ovat 1?

13. Taululle on kirjoitettu n ykköstä. Siirto koostuu kahden numeron poistamisesta ja kummankin korvaamisesta niiden summalla. Kun h siirtoa on tehty, taulun kaikki n lukua ovat arvoltaan m. Todista, että $h \leq \frac{1}{2} n \log_2 m$.

14. Kuutio koostuu 4^3 yksikkökuutiosta, jotka kaikki sisältävät kokonaisluvun. Yksikkökuution naapurit ovat yksikkökuutioita, joilla on yhteinen tahko yksikkökuution kanssa. Jokaisella siirrolla valitaan yksi yksikkökuutio ja kasvatetaan sen naapureiden numeroita yhdellä. Onko lähtötilanteesta riippumatta mahdollista päästä tilanteeseen, jossa kaikki 4^3 kokonaislukua ovat jaollisia kolmella?

15. Itämerellä on 2016 satamaa. Joidenkin satamien välillä on kaksisuuntaisia lauttayhteyksiä. On mahdotonta tehdä sarjaa peräkkäisiä suoria matkoja $C_1 - C_2 - \cdots - C_{1062}$, missä kaikki satamat $C_1, \ldots, C_{1062}$ ovat eri satamia. Todista, että on olemassa kaksi sellaista erillistä 477 sataman joukkoa A ja B, että mistään joukon A satamasta ei ole suoraa yhteyttä mihinkään joukon B satamaan.

16. Kolmion ABC pisteet D ja E ovat kärkien C ja B kulmanpuolittajien ja sivujen AB ja AC leikkauspisteet, vastaavasti. Pisteet F ja G ovat sivujen AB ja AC jatkeilla kärkien B ja C suuntaan ja toteuttavat ehdot $BF = CG = BC$. Todista, että $FG \parallel DE$.

17. Olkoon $ABCD$ kupera nelikulmio, jossa $AB = AD$. Olkoon T sellainen piste lävistäjällä AC, että $\sphericalangle ABT + \sphericalangle ADT = \sphericalangle BCD$. Todista, että $AT + AC \geq AB + AD$.

18. Olkoon $ABCD$ suunnikas, jossa $\sphericalangle BAD = 60°$. Olkoot K ja L sivujen BC ja CD keskipisteet. Oletetaan, että $ABKL$ on jännenelikulmio. Määritä $\sphericalangle ABD$.

19. Tarkastellaan tasossa olevia kolmioita, joiden kärkien koordinaatit ovat kokonaislukuja. Tällaiselle kolmiolle voidaan tehdä *sallittu muunnos* siirtämällä yhtä kärkeä kärjen vastakkaisen sivun suuntaisesti toiseen kokonaisluvuista muodostuvaan koordinaattipisteeseen. Osoita, että jos kahdella kolmiolla on sama pinta-ala, niin on olemassa sarja sallittuja muunnoksia, jotka muuntavat yhden kolmion toiseksi.

20. Olkoon $ABCD$ jännenelikulmio, jonka sivut AB ja CD eivät ole yhdensuuntaisia. Olkoon M sivun CD keskipiste. Olkoon P sellainen piste jännenelikulmion $ABCD$ sisällä, että $PA = PB = CM$. Todista, että AB, CD ja janan MP keskinormaali kulkevat saman pisteen kautta.