Baltic Way 2016
5. november 2016, Oulu, Finland
Version: Norwegian

Tid til rådighet: $4\frac{1}{2}$ time. Spørsmål kan stilles de første 30 minuttene.
Kun skrive- og tegneredskaper tillatt.

1. Finn alle par av primtall (p, q) slik at

$$p^3 - q^5 = (p + q)^2.$$

2. Vis eller motbevis følgende hypoteser.

(a) For hvert heltall $k \geq 2$ inneholder enhver følge av k påfølgende positive heltall et tall som ikke er delelig med noe primtall mindre enn k.

(b) For hvert heltall $k \geq 2$ inneholder enhver følge av k påfølgende positive heltall et tall som er relativt primisk til alle de andre tallene i følgen.

3. For hvilke heltall $n = 1, \ldots, 6$ har ligningen

$$a^n + b^n = c^n + n$$

en heltallig løsning?

4. La n være et positivt heltall og la a, b, c, d være heltall slik at $n \mid a + b + c + d$ og $n \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Vis at

$$n \mid a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 4abcd.$$

5. La $p > 3$ være et primtall slik at $p \equiv 3 \pmod 4$. Gitt et positivt heltall a_0, definer følgen $a_0, a_1, \ldots$ av heltall ved $a_n = a_{n-1}^{2^n}$ for alle $n = 1, 2, \ldots$. Vis at det er mulig å velge a_0 slik at delfølgen $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ ikke er konstant modulo p for noe positivt heltall N.

6. Mengden $\{1, 2, \ldots, 10\}$ partitisjoneres i tre delmengder A, B og C. For hver av disse delmengdene beregnes summen av dens elementer, produktet av dens elementer, samt summen av alle sifrene i dens elementer.

Er det mulig at A alene har den største summen av elementer, B alene har det største produktet av elementer, og C alene har den største summen av sifre?

7. Finn alle positive heltall n for hvilke

$$3x^n + n(x + 2) - 3 \geq nx^2$$

holder for alle reelle tall x.

8. Finn alle reelle tall a for hvilke det finnes en ikke-konstant funksjon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som tilfredsstiller de to følgende ligningene for alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{lrcll} \text{(i)} & f(ax) & = & a^2 f(x) & \text{og} \\ \text{(ii)} & f(f(x)) & = & a\,f(x). & \end{array}$$

9. Finn alle kvadrupler (a, b, c, d) av reelle tall som tilfredsstiller følgende ligningsett:

$$\begin{cases} a^3 & + & c^3 & = & 2 \\ a^2b & + & c^2d & = & 0 \\ b^3 & + & d^3 & = & 1 \\ ab^2 & + & cd^2 & = & -6. \end{cases}$$

10. La $a_{0,1}$, $a_{0,2}$, ..., $a_{0,2016}$ være positive reelle tall. For $n \geq 0$ og $1 \leq k < 2016$ la

$$a_{n+1,k} = a_{n,k} + \frac{1}{2a_{n,k+1}} \quad \text{og} \quad a_{n+1,2016} = a_{n,2016} + \frac{1}{2a_{n,1}}.$$

Vis at $\max\limits_{1 \leq k \leq 2016} a_{2016,k} > 44$.

11. Mengden A består av 2016 positive heltall. Alle primdivisorene til disse tallene er mindre enn 30. Vis at det finnes fire forskjellige tall a, b, c og d i A slik at $abcd$ er et kvadrattall.

12. Finnes det en sekskant (ikke nødvendigvis konveks) med sidelengder 1, 2, 3, 4, 5, 6 (ikke nødvendigvis i denne rekkefølgen) som kan bli delt opp i a) 31 b) 32 likesidede trekanter med sidelengder 1?

13. La n tall, alle lik 1, være skrevet på en tavle. Et trekk består i å erstatte to tall som står på tavlen med to kopier av deres sum. Etter h trekk viser det seg at de n tallene på tavlen alle er lik m. Vis at $h \leq \frac{1}{2} n \log_2 m$.

14. En kube er satt sammen av 4^3 enhetskuber som hver inneholder et heltall. I hvert trekk kan man velge en enhetskube, og legge til 1 til hvert av tallene i de kubene som har én side til felles med den valgte kuben. Er det mulig å nå en tilstand der hvert av de 4^3 tallene er delelig med 3, uavhengig av hva utgangstilstanden var?

15. Østersjøen har 2016 havner. Det er satt opp toveis direkteforbindelser med ferge mellom noen av dem. Det er umulig å ta en rute med direkteforbindelser $C_1 - C_2 - \cdots - C_{1062}$ der alle havnene $C_1, \ldots, C_{1062}$ er forskjellige. Vis at det finnes to disjunkte mengder A og B bestående av 477 havner hver, slik at ingen havn i A har direkte fergeforbindelse til noen havn i B.

16. I trekanten ABC er D skjæringspunktet mellom vinkelhalveringslinjen fra C og siden AB, mens E er skjæringspunktet mellom vinkelhalveringslinjen fra B og siden AC. Punktene F på forlengelsen av AB bortenfor B og G på forlengelsen av AC bortenfor C tilfredsstiller $BF = CG = BC$. Vis at $FG \parallel DE$.

17. La $ABCD$ være en konveks firkant med $AB = AD$. La T være et punkt på diagonalen AC slik at $\angle ABT + \angle ADT = \angle BCD$. Vis at $AT + AC \geq AB + AD$.

18. La $ABCD$ være et parallellogram slik at $\angle BAD = 60°$. La K og L være midtpunktet på henholdsvis BC og CD. Antatt at $ABKL$ er syklisk, finn $\angle ABD$.

19. Betrakt trekanter i planet hvis hjørner har heltallige koordinater. En slik trekant kan *lovlig transformeres* ved å flytte ett av hjørnene parallelt med den motstående siden til et nytt punkt med heltallige koordinater. Vis at dersom to trekanter har samme areal, finnes det alltid en følge med lovlige transformasjoner som transformerer den ene til den andre.

20. La $ABCD$ være en syklisk firkant der AB og CD ikke er parallelle. La videre M være midtpunktet på CD, og P et punkt i $ABCD$ slik at $PA = PB = CM$. Vis at AB, CD og midtnormalen til MP skjærer hverandre i ett punkt.