BALTIC WAY 2016 OULU

Baltic Way 2016
5 November 2016, Oulu, Finland
Version: Russian

Длительность олимпиады: $4\frac{1}{2}$ часа.
Вопросы по условиям: в первые 30 минут олимпиады.
Разрешается использовать только письменные принадлежности.

---

1. Найдите все пары простых чисел (p, q), для которых $p^3 - q^5 = (p+q)^2$.

2. Верны ли следующие два утверждения?

а) Для любого $k \geqslant 2$ среди любых k подряд идущих натуральных чисел найдется число, все простые делители которого не меньше k.

б) Для любого $k \geqslant 2$ среди любых k подряд идущих натуральных чисел найдется число, взаимно простое с остальными.

3. При каких $n = 1, \ldots, 6$ уравнение $a^n + b^n = c^n + n$ имеет решение в целых числах?

4. Даны натуральное число n и целые числа a, b, c, d, для которых $a+b+c+d$ кратно n и $a^2+b^2+c^2+d^2$ кратно n. Докажите, что $a^4+b^4+c^4+d^4+4abcd$ кратно n.

5. Пусть $p > 3$ — простое число, $p \equiv 3 \pmod 4$. Для натурального числа a_0 определим последовательность a_0, a_1, a_2, $\ldots$ по формуле $a_n = a_{n-1}^{2^n}$ при $n = 1, 2, \ldots$. Докажите, что можно выбрать число a_0 так, что последовательность a_n ни с какого номера N не становится постоянной по модулю p.

6. Множество $\{1, 2, \ldots, 10\}$ разбито на три подмножества A, B, C. Для каждого из них подсчитано три числа: сумма элементов, произведение элементов, и общая сумма цифр всех его элементов. Могло ли случиться так, что из этих трех подмножеств A имеет строго наибольшую сумму, B имеет строго наибольшее произведение, а C — строго наибольшую сумму цифр?

7. Для каких натуральных n неравенство $3x^n + n(x+2) - 3 \geqslant nx^2$ выполнено при всех $x \in \mathbb{R}$?

8. Найдите все вещественные a, для которых существует непостоянная функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, при всех x удовлетворяющая одновременно двум условиям:

i) $f(ax) = a^2 f(x)$

ii) $f(f(x)) = a f(x)$.

9. Найдите все четверки (a, b, c, d) вещественных чисел, которые удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} a^3 + c^3 = 2 \\ a^2 b + c^2 d = 0 \\ b^3 + d^3 = 1 \\ ab^2 + cd^2 = -6. \end{cases}$$

10. Пусть $a_{0,1}$, $a_{0,2}$, $\ldots$, $a_{0,2016}$ — положительные числа. При $n \geqslant 0$ определим

$$a_{n+1,k} = a_{n,k} + \frac{1}{2a_{n,k+1}} \quad \text{при } 1 \leqslant k < 2016 \qquad \text{и} \qquad a_{n+1,2016} = a_{n,2016} + \frac{1}{2a_{n,1}}.$$

Докажите, что $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant 2016} a_{2016,k} > 44$.

11. Множество A состоит из 2016 натуральных чисел, все простые делители которых меньше 30. Докажите, что найдутся такие 4 различных числа a, b, c, $d \in A$, что $abcd$ — точный квадрат.

12. Существует ли (не обязательно выпуклый) шестиугольник со сторонами 1, 2, 3, 4, 5, 6 (не обязательно в таком порядке), который можно разрезать а) на 31; б) на 32 правильных треугольника со стороной 1?

13. На доске написано n единиц. За один ход можно заменить два числа на два экземпляра их суммы. Через h ходов все n чисел на доске стали равны m. Докажите, что $h \leqslant \frac{1}{2}n \log_2 m$.

14. Куб $4 \times 4 \times 4$ составлен из 4^3 единичных кубиков, в каждом из которых записано целое число. За один ход можно выбрать единичный кубик и увеличить на 1 числа, стоящие во всех кубиках, соседних с ним по грани. Верно ли, что при любой начальной расстановке можно сделать все числа кратными трем?

15. На берегу Балтийского моря расположено 2016 портов. Между некоторыми из них действуют прямые двусторонние паромные рейсы. Известно, что невозможно найти последовательность прямых рейсов $C_1 - C_2 - \ldots - C_{1062}$, в которой все порты $C_1, \ldots, C_{1062}$ различны. Докажите, что можно выбрать два непересекащихся множества A и B по 477 портов в каждом так, чтобы ни один из портов A не был связан прямым рейсом ни с одним из портов B.

16. В треугольнике ABC проведены биссектрисы CD и BE. Точки F и G выбраны на продолжениях сторон AB и AC за точки B и C соответственно так, что $BF = CG = BC$. Докажите, что $FG \| DE$.

17. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = AD$. На диагонали AC выбрана точка T так, что $\angle ABT + \angle ADT = \angle BCD$. Докажите, что $AT + AC \geqslant AB + AD$.

18. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $\angle BAD = 60°$. Точки K и L — середины отрезков BC и CD соответственно. Известно, что $ABKL$ — вписанный четырехугольник. Найдите $\angle ABD$.

19. На координатной плоскости рассматриваются треугольники, вершины которых имеют целые координаты. Разрешается передвинуть любую вершину треугольника параллельно противоположной стороне в другую точку с целыми координатами. Докажите, что если два треугольника с целыми вершинами имеют равные площади, то такими преобразованиями можно перевести один треугольник в другой. (Треугольник на координатной плоскости задается неупорядоченной тройкой вершин.)

20. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$ с непараллельными сторонами AB и CD. Точка M — середина стороны CD. Пусть P — точка внутри $ABCD$, для которой $PA = PB = CM$. Докажите, что прямые AB, CD и серединный перпендикуляр к MP пересекаются в одной точке.