5. Baltian tie -kilpailu
Tartto, 11. marraskuuta 1994

1. Olkoon $a \circ b = a + b - ab$. Määritä kaikki kokonaislukukolmikot (x, y, z), joille pätee $(x \circ y) \circ z + (y \circ z) \circ x + (z \circ x) \circ y = 0$.

2. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_9$ mielivaltaisia ei-negatiivisia lukuja, joille pätee $a_1 = a_9 = 0$ ja joista ainakin yksi on nollasta eroava. Todista, että ainakin yhdelle i, $2 \le i \le 8$, pätee epäyhtälö $a_{i-1} + a_{i+1} < 2a_i$. Pysyykö väite totena, jos luku 2 vaihdetaan viimeisessä epäyhtälössä luvuksi 1,9?

3. Määritä lausekkeen

$$xy + x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$$

suurin arvo.

4. Onko olemassa kokonaislukua n, jolle $\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}$ on rationaaliluku?

5. Olkoon $p(x)$ sellainen kokonaislukukertoiminen polynomi, että yhtälöillä $p(x) = 1$ ja $p(x) = 3$ on molemmilla kokonaislukuratkaisuja. Voiko yhtälöllä $p(x) = 2$ olla kaksi eri kokonaislukuratkaisua?

6. Todista, että jokainen supistumaton murtoluku $\dfrac{p}{q}$, missä p ja q ovat positiivisia kokonaislukuja ja q on pariton, on sama kuin murtoluku $\dfrac{n}{2^k - 1}$ joillain positiivisilla kokonaisluvuilla n ja k.

7. Olkoon $p > 2$ alkuluku ja $1 + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + \ldots + \dfrac{1}{(p-1)^3} = \dfrac{m}{n}$, missä m ja n ovat yhteistekijättömiä. Osoita, että m on p:n monikerta.

8. Osoita, että mielivaltaista kokonaislukua $a \ge 5$ kohden on olemassa kokonaisluvut b ja c, $c \ge b \ge a$, siten, että a, b ja c ovat suorakulmaisen kolmion sivujen pituudet.

9. Määritä kaikki sellaiset positiivisten kokonaislukujen parit (a, b), joille $2^a + 3^b$ on kokonaisluvun neliö.

10. Kuinka moni positiivinen kokonaisluku täyttää seuraavat kolme ehtoa:
(a) luvun kaikki numerot kuuluvat joukkoon $\{1, 2, 3, 4, 5\}$;
(b) kahden peräkkäisen numeron erotuksen itseisarvo on aina 1;
(c) luvussa on 1994 numeroa?

11. Olkoot NS ja EW ympyrän $\mathcal{C}$ kaksi toisiaan vastaan kohtisuoraa halkaisijaa. Suora l sivuaa ympyrää $\mathcal{C}$ pisteessä S. Olkoot A ja B kaksi halkaisijan EW suhteen symmetristä $\mathcal{C}$:n pistettä. Merkitään l:n ja suorien NA ja NB leikkauspisteitä A':lla ja B':lla. Osoita, että $|SA'| \cdot |SB'| = |SN|^2$.

12. Kolmion $A_1A_2A_3$ sisään piirretty ympyrä sivuaa sivuja A_2A_3, A_3A_1 ja A_1A_2 pisteissä S_1, S_2 ja S_3. Olkoot O_1, O_2 ja O_3 kolmioiden $A_1S_2S_3$, $A_2S_3S_1$ ja $A_3S_1S_2$ sisään piirrettyjen ympyröiden keskipisteet. Todista, että suorat O_1S_1, O_2S_2 ja O_3S_3 leikkaavat toisensa yhdessä pisteessä.

13. Määritä pienin sellainen luku a, että neliö, jonka sivu on a, voi sisältää viisi 1-säteistä ympyräkiekkoa, joista millään kahdella ei ole yhteisiä sisäpisteitä.

14. Olkoot α, β ja γ kolmion kulmat ja niiden vastaisten sivujen pituudet a, b ja c. Todista epäyhtälö

$$a \cdot \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) + b \cdot \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha}\right) + c \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \geq 2 \cdot \left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}\right).$$

15. Onko olemassa kolmio, jonka kaikkien sivujen ja korkeusjanojen pituudet ovat kokonaislukuja ja jonka piirin pituus on 1995?

16.. Ihmeiden Saarella asuvat siilit. Jokainen siili koostuu kolmesta yksikköjanasta, joilla on yhteinen päätepiste ja joiden väliset kulmat ovat 120°. Oletamme, että kaikki siilit ovat litteinä saaren tasossa eivätkä kosketa toisiaan. Todista, että Ihmeiden Saarella on äärellinen määrä siilejä.

17. Erään kuningaskunnan hallitsija on päättänyt rakentaa 25 uutta kaupunkia 13:lle asumattomalle saarelle niin, että joka saarelle tulee ainakin yksi kaupunki. Jokaisen kahden eri saarilla sijaitsevan kaupungin välille perustetaan suora lauttayhteys. Määritä lauttayhteyksien pienin mahdollinen lukumäärä.

18. Tasossa on annettuna n $(n > 2)$ suoraa. Mitkään kaksi suorista eivät ole yhdensuuntaiset ja mitkään kolme eivät leikkaa samassa pisteessä. Jokainen suorien leikkauspiste on varustettu kokonaisluvulla 1:n ja $n-1$:n väliltä. Osoita, että numerointi voidaan suorittaa siten, että jokaisen suoran leikkauspisteissä ovat kaikki luvut 1:stä $n-1$:een, silloin ja vain silloin, kun n on parillinen.

19. Ihmeiden Saaren tiedustelupalvelulla on Tartossa 16 vakoojaa. Jokainen heistä valvoo muutamia työtovereitaan. Tiedetään, että jos vakooja A valvoo vakoojaa B, niin B ei valvo A:ta. Lisäksi tiedetään, että jokaiset kymmenen vakoojaa voidaan numeroida niin, että ensimmäinen vakooja valvoo toista vakoojaa, toinen valvoo kolmatta, ... ja kymmenes valvoo ensimmäistä. Todista, että jokaiset yksitoista vakoojaa voidaan myös numeroida vastaavalla tavalla.

20. Tasasivuinen kolmio on jaettu 9 000 000:ksi yhdenmuotoiseksi tasasivuiseksi kolmioksi sivujen suuntaisilla suorilla. Jokaisen pikkukolmion kärki on väritetty yhdellä kolmesta väristä. Osoita, että on olemassa kolme samanväristä pistettä, jotka ovat kärkinä kolmiossa, jonka sivut ovat alkuperäisen kolmion sivujen suuntaiset.