Tehtävät

9. marraskuuta 2013, Riika, Latvia

-Finnish version-

Aikaa on 4 tuntia 30 minuuttia.
Ensimmäisten 30 minuutin aikana voi esittää kysymyksiä.
Ainoat sallitut työvälineet ovat kirjoitus- ja piirustusvälineet.

Tehtävä 1. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Oletetaan, että n lukua valitaan taulukosta

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ n & n+1 & \cdots & 2n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)n & (n-1)n+1 & \cdots & n^2-1 \end{array}$$

joista mitkään kaksi eivät ole samalla rivillä tai sarakkeella. Määritä näiden n luvun suurin mahdollinen tulo.

Tehtävä 2. Olkoot k ja n positiivisia kokonaislukuja ja $x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots y_n$ keskenään erisuuria kokonaislukuja. Kokonaislukukertoimisella polynomilla P pätee

$$P(x_1) = P(x_2) = \ldots = P(x_k) = 54$$

ja

$$P(y_1) = P(y_2) = \ldots = P(y_n) = 2013.$$

Määritä lausekkeen kn suurin mahdollinen arvo.

Tehtävä 3. Merkitään reaalilukujen joukkoa symbolilla $\mathbb{R}$. Määritä kaikki funktiot $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ niin, että

$$f(xf(y) + y) + f(-f(x)) = f(yf(x) - y) + y \qquad \text{kaikilla } x, y \in \mathbb{R}.$$

Tehtävä 4. Todista, että seuraava epäyhtälö pätee kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla x, y, z:

$$\frac{x^3}{y^2+z^2} + \frac{y^3}{z^2+x^2} + \frac{z^3}{x^2+y^2} \geq \frac{x+y+z}{2}.$$

Tehtävä 5. Luvut 0 ja 2013 kirjoitetaan kuution vastakkaisiin kärkiin. Jäljellä oleviin kuuteen kärkeen kirjoitetaan jotkin reaaliluvut. Jokaiseen kuution särmään kirjoitetaan sen päätepisteissä olevien lukujen erotus. Milloin särmille kirjoitettujen lukujen neliöiden summa on pienin mahdollinen?

Tehtävä 6. Joulupukilla on ainakin n lahjaa n lapselle. Jokaisella $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, i:s lapsi pitää $x_i > 0$ eri lahjasta. Oletetaan, että

$$\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n} \leq 1.$$

Todista, että joulupukki voi antaa jokaiselle lapselle lahjan, josta tämä pitää.

Tehtävät

9. marraskuuta 2013, Riika, Latvia

-Finnish version-

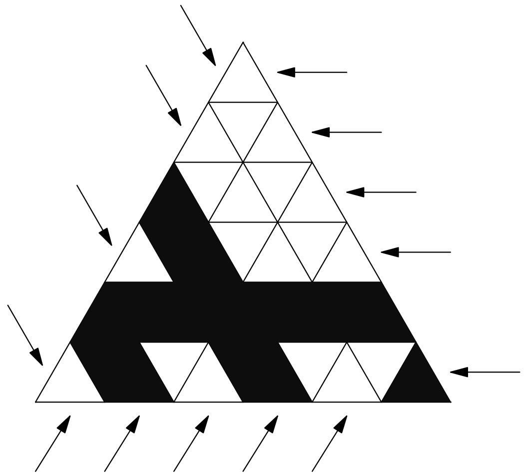
Tehtävä 7. Liitutaululle on kirjoitettu positiivinen kokonaisluku. Pelaajat A ja B pelaavat seuraavaa peliä: vuorollaan pelaaja valitsee taululla olevan luvun n tekijän m, jolle $1 < m < n$, ja korvaa luvun n luvulla $n - m$. Pelaaja A aloittaa ja pelaajat vuorottelevat. Pelaaja, joka ei voi siirtää, häviää. Millä ensimmäisillä luvuilla pelaajalla B on voittostrategia?

Tehtävä 8. Saunassa on n huonetta, joissa on rajattomasti tilaa. Yhdessäkään huoneessa ei voi olla samanaikaisesti miestä ja naista. Lisäksi miehet haluavat saunoa samassa huoneessa vain sellaisten miesten kanssa, joita eivät tunne, ja naiset haluavat saunoa samassa huoneessa vain sellaisten naisten kanssa, joita tuntevat. Etsi suurin luku k, jolle k avioparia voi käydä saunassa yhtä aikaa olettaen, että kaksi miestä tuntee toisensa, jos ja vain jos heidän vaimonsa tuntevat toisensa.

Tehtävä 9. Maassa on 2014 lentokenttää, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla. Kahden lentokentän välillä on suora lento, jos ja vain jos näiden lentokenttien välinen suora jakaa maan kahteen osaan, joissa kummassakin on 1006 lentokenttää. Osoita, ettei ole olemassa kahta lentokenttää niin, että toisesta pääsee toiseen lentoreittiä, joka kulkee jokaisen 2014 lentokentän kautta täsmälleen kerran.

Tehtävä 10. Valkoinen tasasivuinen kolmio jaetaan n^2 yhtäsuureen pienenpään kolmioon suorilla, jotka ovat yhdensuuntaisia kolmion sivujen kanssa. Kutsutaan *kolmiojonoksi* kaikkia kolmioita, jotka ovat kahden viereisen yhdensuuntaisen suoran välissä. Erityisesti alkuperäisen kolmion kulmassa oleva kolmio on myös kolmiojono.

Väritetään kaikki kolmiot mustiksi käyttämällä seuraavanlaisia operaatioita: valitaan kolmiojono, jossa on ainakin yksi valkoinen kolmio ja väritetään se mustaksi (mahdollinen tilanne tapauksessa $n = 6$ neljän operaation jälkeen on esitetty kuvassa 1; nuolet kuvaavat mahdollisia seuraavia operaatioita tässä tilanteessa). Määritä pienin ja suurin operaatioiden mahdollinen määrä.



Kuva 1

Tehtävä 11. Teräväkulmaisessa komiossa ABC, jossa $AC > AB$, olkoon D pisteen A projektio sivulle BC. Olkoot E ja F pisteen D projektiot sivuille AB ja AC. Olkoon G suorien AD ja EF leikkauspiste. Olkoon H suoran AD ja kolmion ABC ympäripiirretyn ympyrän toinen leikkauspiste. Todista, että

$$AG \cdot AH = AD^2 .$$

Tehtävä 12. Olkoon $ABCD$ puolisuunnikas, jossa $AB||CD$. Oletetaan, että kolmion BCD ympäripiirretty ympyrä leikkaa suoran AD pisteessä E, joka eroaa pisteistä A ja D. Todista, että suora BC sivuaa kolmion ABE ympäripiirrettyä ympyrää.

Tehtävä 13. Tetraedrin kaikki tahkot ovat suorakulmaisia kolmioita. Tiedetään, että kolmella sen särmistä on sama pituus s. Määritä tetraedrin tilavuus.

Tehtävä 14. Samansäteiset ympyrät α ja β leikkaavat kahdessa pisteessä, joista toinen on P. Olkoot A ja B pisteen P vastaiset pisteet ympyröillä α ja β, tässä järjestyksessä. Kolmas samansäteinen ympyrä kulkee pisteen P kautta, ja leikkaa ympyrät α ja β pisteissä X ja Y, tässä järjestyksessä.

Osoita, että suorat XY ja AB ovat yhdensuuntaiset.

Tehtävä 15. Tasoon on piirretty neljä samankeskistä ympyrää, joiden säteet muodostavat aidosti kasvavan aritmeettisen jonon. Todista, että ei ole olemassa neliötä, jonka kärkipisteet sijaitsevat eri ympyröillä.

Tehtävä 16. Kutsutaan positiivista kokonaislukua n *miellyttäväksi*, jos on olemassa kokonaisluku k, $1 < k < n$, siten, että

$$1 + 2 + \cdots + (k-1) = (k+1) + (k+2) + \cdots + n.$$

Onko olemassa miellyttävää lukua N, jolle pätee

$$2013^{2013} < \frac{N}{2013^{2013}} < 2013^{2013} + 4 \ ?$$

Tehtävä 17. Olkoot c ja $n > c$ positiivisia kokonaislukuja. Maryn opettaja kirjoittaa taululle n positiivista kokanaislukua. Pitääkö paikkansa kaikilla n ja c, että

Mary voi aina valita opettajan kirjoittamille luvuille järjestyksen $a_1, \ldots, a_n$ niin, että syklinen tulo $(a_1 - a_2) \cdot (a_2 - a_3) \cdot \ldots \cdot (a_{n-1} - a_n) \cdot (a_n - a_1)$ on kongruenttia toisen luvuista 0 tai c kanssa modulo n?

Tehtävä 18. Määritä kaikki kokonaislukuparit (x, y), joille $y^3 - 1 = x^4 + x^2$.

Tehtävä 19. Olkoon $a_0 = a > 0$ kokonaisluku ja $a_n = 5a_{n-1} + 4$ kaikilla $n \geq 1$. Voidaanko a valita niin, että a_{54} on luvun 2013 monikerta?

Tehtävät

9. marraskuuta 2013, Riika, Latvia

-Finnish version-

Tehtävä 20. Määritä kaikki polynomit f, joiden kertoimet ovat epänegatiivisia kokonaislukuja siten, että kaikilla alkuluvuilla p ja positiivisilla kokonaisluvuilla n on olemassa alkuluku q ja positiivinen kokonaisluku m siten, että $f(p^n) = q^m$.