Baltian tie 2020

Version: *Finnish*

14. marraskuuta, 2020

Aika: 4.5 tuntia.
Kysymyksiä saa esittää ensimmäisten 30 minuutin aikana.
Ainoastaan kirjoitus- ja piirustusvälineitä saa käyttää tehtävien ratkaisemiseen.

Tehtävä 1. Olkoon $a_0 > 0$ reaaliluku ja

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{\sqrt{1 + 2020 \cdot a_{n-1}^2}}, \quad \text{kun } n = 1, 2, \ldots, 2020.$$

Osoita, että $a_{2020} < \frac{1}{2020}$.

Tehtävä 2. Olkoot a, b, c positiivisia reaalilukuja, joille $abc = 1$. Osoita, että

$$\frac{1}{a\sqrt{c^2+1}} + \frac{1}{b\sqrt{a^2+1}} + \frac{1}{c\sqrt{b^2+1}} > 2.$$

Tehtävä 3. Reaalilukujen sarja $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ on määritelty rekursiivisesti siten, että $a_0 = 2$ ja rekursiokaava on

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1}^2 & \text{jos } a_{n-1} < \sqrt{3} \\ \dfrac{a_{n-1}^2}{3} & \text{jos } a_{n-1} \geqslant \sqrt{3}. \end{cases}$$

Toinen reaalilukujen sarja $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ on määritelty ensimmäisen kaavan perusteella seuraavasti:

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{jos } a_{n-1} < \sqrt{3} \\ \dfrac{1}{2^n} & \text{jos } a_{n-1} \geqslant \sqrt{3}, \end{cases}$$

ja se pätee kaikille $n \geqslant 1$. Osoita, että

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{2020} < \frac{2}{3}.$$

Tehtävä 4. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille

$$f(f(x) + x + y) = f(x + y) + yf(y)$$

pätee kaikille reaaliluvuille x, y.

Tehtävä 5. Etsi kaikki reaaliluvut x, y, z, joille

$$x^2y + y^2z + z^2 = 0$$
$$z^3 + z^2y + zy^3 + x^2y = \frac{1}{4}(x^4 + y^4)$$

Tehtävä 6. Olkoon $n > 2$ positiivinen kokonaisluku. Jorin polttareissa on n vierasta ja jokainen vieras on ystävä ainakin yhden toisen vieraan kanssa. Jori järjestää pelin vieraiden kesken. Jokainen vieras saa vesikannun siten, että juhlissa ei ole kahta vierasta, joilla on sama määrä vettä kannuissaan. Jokainen vieras etenee nyt seuraavasti yht'aikaa. Jokainen vieras ottaa yhden kupin jokaista polttareissa olevalla ystäväänsä kohti ja jakaa veden kannustaan tasan näihin kuppeihin. Sitten hän antaa yhden kupin kullekin ystävälleen. Jokainen vieras, joka on saanut kupin vettä jokaiselta ystävältään, kaataa saamansa veden kannuunsa. Mikä on pienin mahdollinen määrä sellaisia vieraita, joilla ei ole samaa määrää vettä kuin heillä oli pelin alussa?

Tehtävä 7. Muurarilla on tiiliä, joiden koko on $2 \times 5 \times 8$ ja toisia tiiliä, joiden koko on $2 \times 3 \times 7$. Hänellä on myös laatikko, jonka koko on $10 \times 11 \times 14$. Tiilet ja laatikko ovat kaikki suorakulmaisia särmiöitä. Muurari haluaa pakata tiilet laatikkoon siten, että sen koko tilavuus tulee täytettyä ilman, että yksikään tiili törröttää ulos laatikosta. Määritä kaikki mahdolliset tiilien kokonaismäärät, jotka hän voi pakata.

Tehtävä 8. Olkoon n annettu positiivinen kokonaisluku. Ravintola tarjoaa vaihtoehtoja n alkupalasta, n pääruoasta, n jälkiruoasta ja n viinistä. Juhliva yritys illastaa ravintolassa ja jokainen vieras valitsee alkupalan, pääruoan, jälkiruoan ja viinin. Ketkään kaksi ihmistä eivät ota tarkalleen samaa tilausta. Huomataan, että ei ole sellaista n vieraan ryhmää, että heidän tilauksensa olisi samat kolmessa lajissa mutta kaikki erilaisia neljännessä lajissa. (Esimerkiksi ei ole n ihmistä, jotka tilaavat tasan samat kolme ruokalajia, mutta n eri viiniä.) Mikä on vieraiden suurin mahdollinen lukumäärä?

Tehtävä 9. Verkon G jokaiselle solmulle v sijoitetaan luku $f(v) \in \{1, 2\}$ ja jokaiselle särmälle e sijoitetaan luku $f(e) \in \{1, 2, 3\}$. Olkoon $S(v)$ solmusta v lähteville särmille sijoitettujen lukujen summa plus luku $f(v)$. Sanomme, että lukujen sijoitus on f is *viileä* jos $S(u) \neq S(v)$ jokaiselle solmuparille (u, v), jotka ovat vierekkäisiä (eli yhdistettyjä särmällä) verkossa G. Osoita, että jokaisella verkolla on olemassa viileä sijoitus.

Tehtävä 10. Alice ja Bob leikkivät piilosta. Aluksi Bob valitsee salaisen, kiinnitetyn pisteen B yksikköneliöltä. Sitten Alice valitsee sarjan pisteitä $P_0, P_1, \ldots, P_N$ tasolta. Valittuaan pisteen P_k (mutta ennen pisteen P_{k+1} valintaa), missä $k \geqslant 1$, Bob sanoo "lämpenee" jos P_k on lähempänä pistettä B kuin P_{k-1}, muutoin hän sanoo "kylmenee". Kun Alice on valinnut pisteen P_N ja kuullut Bobin vastauksen, Alice valitsee viimeisen pisteen A. Alice voittaa, jos etäisyys AB on korkeintaan $\frac{1}{2020}$, muutoin Bob voittaa. Osoita, että jos $N = 18$, niin Alice ei voi taata voittoaan.

Tehtävä 11. Olkoon ABC kolmio, jossa $AB > AC$. Kulman $\angle BAC$ sisäinen puolittaja leikkaa sivun BC pisteessä D. Ympyrät, joiden halkaisijat ovat BD ja CD, leikkaavat kolmion $\triangle ABC$ ympäri piirretyn ympyrän uudelleen pisteissä $P \neq B$ ja $Q \neq C$ (samassa järjestyksessä). Suorat PQ ja BC leikkaavat pisteessä X. Osoita, että AX on kolmion $\triangle ABC$ ympäri piirretyn ympyrän tangentti.

Tehtävä 12. Olkoon ABC kolmio, jonka ympäri piirretty ympyrä on ω. Kulmien $\angle ABC$ ja $\angle ACB$ sisäiset puolittajat leikkaavat ympyrän ω pisteissä $X \neq B$ ja $Y \neq C$ (samassa järjestyksessä). Olkoon K sellainen piste CX:llä, että $\angle KAC = 90°$. Vastaavasti olkoon L piste BY:llä siten, että $\angle LAB = 90°$. Olkoon S ympyrän ω kaaren CAB keskipiste. Osoita, että $SK = SL$.

Tehtävä 13. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, jonka ympäri piirretty ympyrä on ω. Olkoon ℓ ympyrän ω tangentti pisteessä A. Olkoon X pisteen B projektio suoralla ℓ ja Y pisteen B projektio suoralla AC. Olkoon H kolmion BXY korkeusjanojen leikkauspiste. CH leikkaa suoran ℓ pisteessä D. Osoita, että BA puolittaa kulman CBD.

Tehtävä 14. On annettu teräväkulmainen kolmio ABC, jonka korkeusjanojen leikkauspiste on H. Olkoon ω ympyrä, joka kulkee pisteiden B, C ja H kautta ja olkoon Γ ympyrä, jonka halkaisija on AH. Olkoon $X \neq H$ ympyröiden ω ja Γ toinen leikkauspiste ja olkoon γ ympyrän Γ peilaus AX:n yli.

Oletetaan, että γ ja ω leikkaavat uudelleen pisteessä $Y \neq X$, ja suora AH ja ω leikkaavat uudelleen pisteessä $Z \neq H$. Osoita, että ympyrä, joka kulkee pisteiden A, Y, Z kautta, kulkee janan BC keskipisteen läpi.

Tehtävä 15. Bob valitsee tasolta 3 pistettä A_0, B_0, C_0 (jotka eivät välttämättä ole erillisiä) siten, että $A_0B_0 + B_0C_0 + C_0A_0 = 1$. Sitten hän valitsee pisteet A_1, B_1, C_1 (jotka eivät välttämättä ole erillisiä) sellaisella tavalla, että $A_1B_1 = A_0B_0$ ja $B_1C_1 = B_0C_0$. Seuraavaksi hän valitsee pisteet A_2, B_2, C_2 pisteiden A_1, B_1, C_1 permutaationa. Lopuksi Bob valitsee pisteet A_3, B_3, C_3 (jotka eivät välttämättä ole erillisiä) sellaisella tavalla, että $A_3B_3 = A_2B_2$ ja $B_3C_3 = B_2C_2$. Mikä on suurin ja pienin mahdollinen luvun $A_3B_3 + B_3C_3 + C_3A_3$ arvo, minkä Bob voi saavuttaa?

Tehtävä 16. Richard ja Kaarel valitsevat vuorotellen lukuja joukosta $\{1, \ldots, p-1\}$, missä $p > 3$ on alkuluku. Richard valitsee ensin. Lukua, jonka yksi pelaajista on valinnut, ei voi valita uudelleen kumpikaan pelaajista. Jokainen luku, jonka Richard on valinnut, kerrotaan seuraavalla luvulla, jonka Kaarel valitsee. Kaarel voittaa, jos millä tahansa hetkellä hänen vuoronsa jälkeen kaikkien tähän asti laskettujen tulojen summa on jaollinen luvulla p. Richard voittaa, jos tätä ei tapahdu, eli jos luvut loppuvat kesken ennen kuin mikään summa on jaollinen luvulla p. Voiko kumpikaan pelaajista taata voittonsa riippumatta vastustajansa siirroista ja jos voi, kumpi pelaaja on kyseessä?

Tehtävä 17. Kun p on alkuluku ja n positiivinen kokonaisluku, niin $f(p, n)$ on suurin kokonaisluku k, jolle $p^k \mid n!$. Olkoon p annettu alkuluku ja m ja c annettuja positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että on olemassa äärettömän monta positiivista kokonaislukua n, joille $f(p, n) \equiv c \pmod{m}$.

Tehtävä 18. Olkoon $n \geqslant 1$ positiivinen kokonaisluku. Sanomme, että kokonaisluku k on luvun n *fani*, jos $0 \leqslant k \leqslant n-1$ ja on olemassa kokonaisluvut $x, y, z \in \mathbb{Z}$ siten, että

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &\equiv 0 \pmod{n}; \\ xyz &\equiv k \pmod{n}. \end{aligned}$$

Olkoon $f(n)$ luvun n fanien lukumäärä. Määritä $f(2020)$.

Tehtävä 19. Olkoon $d(n)$ positiivisen kokonaisluvun n positiivisten tekijöiden lukumäärä. Osoita, että on olemassa äärettömän monta positiivista kokonaislukua n, joille $\lfloor \sqrt{3} \cdot d(n) \rfloor$ jakaa luvun n.

Tehtävä 20. Olkoot A ja B positiivisten kokonaislukujen joukot, joille $|A| \geq 2$ ja $|B| \geq 2$. Olkoon S joukko, joka koostuu $|A| + |B| - 1$ luvusta muotoa ab, missä $a \in A$ ja $b \in B$. Osoita, että on olemassa keskenään erisuuret $x, y, z \in S$ siten, että x on yz:n jakaja.