Koeaika: 4 tuntia ja 30 minuuttia.
Kysymyksiä saa kysyä ensimmäisen 30 minuutin aikana.
Vain kirjoitus- ja piirtovälineet ovat sallittuja.

Tehtävä 1: Etsi kaikki aidosti kasvavat kokonaislukujonot $1 = a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$, joilla

$$3(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}$$

kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n.

Tehtävä 2: Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_{2023}$ positiivisia reaalilukuja, joille pätee

$$a_1 + a_2^2 + a_3^3 + \cdots + a_{2023}^{2023} = 2023.$$

Osoita, että

$$a_1^{2023} + a_2^{2022} + \cdots + a_{2022}^2 + a_{2023} > 1 + \frac{1}{2023}.$$

Tehtävä 3: Kutsumme yhtälöiden joukkoa, missä joukon yhtälöiden reaalilukuarvoiset muuttujat ovat $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, *flensburgilaiseksi*, jos on olemassa $i \in \{1, 2, 3\}$ siten, että jokainen yhtälöjoukon ratkaisu, jossa muuttujien arvot ovat toisistaan eroavat, toteuttaa ehdon $x_i > x_j$ kaikilla $j \neq i$.

Määritä kokonaisluvut $n \geq 2$, joilla kahden yhtälön joukko

$$a^n + b = a \text{ ja } c^{n+1} + b^2 = ab$$

kolmen reaaliarvoisen muuttujan a, b, c suhteen on flensburgilainen.

Tehtävä 4: Määritä kaikki funktiot $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joilla pätee

$$f(f(x) + y) + xf(y) = f(xy + y) + f(x)$$

kaikilla reaaliluvuilla x ja y.

Tehtävä 5: Etsi pienin positiivinen reaaliluku α, jolla pätee

$$\frac{x + y}{2} \geq \alpha\sqrt{xy} + (1 - \alpha)\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}$$

kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla x ja y.

Tehtävä 6: Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Väritämme $n \times n$-ruudukon ruudut k:lla eri värillä siten, että käytämme jokaista väriä vähintään kerran. Sanomme, että kaksi eri väriä A ja B *koskevat toisiaan*, jos on olemassa värillä A väritetty ruutu, joka jakaa sivun värillä B väritetyn ruudun kanssa. Ruudukko on väritetty siten, että jokainen väri koskee enintään kahta muuta väriä. Mikä on luvun k suurin mahdollinen arvo luvun n funktiona?

Tehtävä 7: Robotti kulkee tasossa suoraa polkua pitkin. Aina kuljettuaan metrin robotti kääntyy 90° vasemmalle tai oikealle. Jossain vaiheessa robotti päätyy pisteeseen, josta aloitti polun, kulkematta minkään pisteen kautta yhtä kertaa useammin. Tällöin robotti pysähtyy välittömästi. Mitkä ovat robotin polun mahdolliset pituudet?

Tehtävä 8: Flensburgin kaupungissa on eräs äärettömän pitkä katu, jonka talot on numeroitu luvuilla $2, 3, \ldots$ Flensburgin poliisi yrittää saada kiinni varkaan. Varas siirtyy joka yö viereiseen taloon siitä, jossa sillä hetkellä on.

Kiusatakseen paikallisia lainvalvojia varas paljastaa joka aamu sen talon numeron suurimman alkutekijän, johon on siirtynyt.

Joka sunnuntai-iltapäivänä poliisi tutkii yhden talon ja pidättää varkaan, jos varas sijaitsee tutkitussa talossa. Onko poliisilla strategiaa, jolla varas saadaan pidätettyä äärellisessä ajassa?

Tehtävä 9: Määritä, onko olemassa kolmiota, jonka voi jakaa 101:een yhtenevään kolmioon.

Tehtävä 10: Ympyrällä on merkitty $n \geq 3$ pistettä. Jokainen merkitty piste on väritetty punaiseksi, vihreäksi tai siniseksi. Siirto koostuu kahden merkityn erivärisen pisteen poistamisesta ja uuden merkityn pisteen lisäämisestä poistettujen pisteiden väliin siten, että uusi piste väritetään värillä, joka eroaa poistettujen pisteiden väreistä. Lopputilassa kaikki merkityt pisteet ovat samanvärisiä. Tätä väriä kutsutaan *lopputilan väriksi*. Etsi kaikki luvut n, joilla on olemassa n:n merkityn pisteen alkutila, jossa mikään pisteistä ei ole väritetty yhdellä väreistä, ja josta voi sopivalla jonolla siirtoja päätyä minkä tahansa väriseen lopputilaan.

Tehtävä 11: Olkoon ABC kolmio ja J sivua BC ja sivujen AB ja AC jatkeita sivuavan ympyrän keskipiste. Piste K on pisteen J peilaus suoran BC suhteen. Piste E on suoralla BJ ja piste F on suoralla CJ siten, että $\angle EAB = \angle CAF = 90°$. Osoita, että $\angle FKE + \angle FJE = 180°$.

Tehtävä 12: Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, jossa $AB > AC$. Kulman $\angle BAC$ sisäinen kulmanpuolittaja leikkaa suoran BC pisteessä D. Olkoon O kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Suora AO leikkaa janan BC pisteessä E. Olkoon J kolmion AED sisään piirretyn ympyrän keskipiste. Osoita, että jos $\angle ADO = 45°$, niin $OJ = JD$.

Tehtävä 13: Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, jossa $AB < AC$ ja kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on I. Olkoon D pisteen I projektio suoralle BC. Olkoon H kolmion ABC ortokeskus. Oletetaan, että $\angle IDH = \angle CBA - \angle ACB$. Osoita, että $AH = 2 \cdot ID$.

Tehtävä 14: Olkoon G kolmion ABC painopiste. Olkoon D kolmion BCG ympäri piirretyn ympyrän keskipiste, E kolmion CAG ympäri piirretyn ympyrän keskipiste ja F kolmion ABG ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Piirretään pisteen E kautta kulkeva, suoraa AB kohtisuorassa oleva suora, ja pisteen F kautta kulkeva, suoraa AC kohtisuorassa oleva suora, ja olkoon X näiden suorien leikkauspiste. Osoita, että suora DX puolittaa janan EF.

Tehtävä 15: Olkoot ω_1 ja ω_2 ympyröitä, joilla ei ole yhteisiä pisteitä siten, että kumpikaan ei sijaitse toisen sisällä. Valitaan piste M ympyrältä ω_1 ja piste N ympyrältä ω_2 siten, että pisteen M kautta kulkeva ympyrän ω_1 tangentti ja pisteen N kautta kulkeva ympyrän ω_2 tangentti leikkaavat pisteessä P siten, että PMN on tasakylkinen kolmio, jossa $PM = PN$.

Jana MN leikkaa ympyrän ω_1 pisteessä A ja ympyrän ω_2 pisteessä B. Suora PA leikkaa ympyrän ω_1 uudelleen pisteessä C ja suora PB leikkaa ympyrän ω_2 uudelleen pisteessä D. Osoita, että $\angle BCN = \angle ADM$.

Tehtävä 16: Osoita, että on olemassa kokonaislukukertoimiset polynomit f ja g, jotka eivät ole vakiopolynomeja, ja joille pätee seuraava ehto: äärettömän monella alkuluvulla p ei ole olemassa kokonaislukuja x ja y siten, että $p \mid f(x) - g(y)$.

Tehtävä 17: Olkoon $S(m)$ positiivisen kokonaisluvun m numeroiden summa. Etsi kaikki positiivisten kokonaislukujen parit (a,b) siten, että $S(a^{b+1}) = a^b$.

Tehtävä 18: Olkoon $p > 7$ alkuluku ja olkoon A joukon $\{0,1,\dots,p-1\}$ osajoukko, jossa on vähintään $\frac{p-1}{2}$ alkiota. Osoita, että jokaisella kokonaisluvulla r on olemassa (ei välttämättä toisistaan erilliset) luvut $a,b,c,d \in A$ siten, että

$$ab - cd \equiv r \pmod{p}.$$

Tehtävä 19: Osoita, että luvun $2^{2^{2\cdot 2023}}$ numeroiden summa on suurempi kuin 2023.

Tehtävä 20: Olkoon n positiivinen kokonaisluku. *Germaaninen joukko* $n \times n$-ruudukossa on n:n ruudun joukko siten, että jokainen ruutu kuuluu tasan yhteen ruudukon riviin ja tasan yhteen ruudukon sarakkeeseen. Numeroimme ruudukon ruudut luvuilla $1, 2, \dots, n^2$ käyttäen jokaista lukua tasan kerran. Sanomme tällöin, että kokonaisluku on *germaaninen tulo*, jos se on germaanisen joukon ruutujen numeroiden tulo.

(a) Olkoon $n = 8$. Määritä, onko olemassa 8×8-ruudukon numerointia siten, että seuraava ehto toteutuu: kahden germaanisen tulon erotus on aina jaollinen luvulla 65.

(b) Olkoon $n = 10$. Määritä, onko olemassa 10×10-ruudukon numerointia siten, että seuraava ehto toteutuu: kahden germaanisen tulon erotus on aina jaollinen luvulla 101.