# Baltian tie

16. marraskuuta 2024, Tartto, Viro

Version: Finnish

---

Aikaa on 4 tuntia 30 minuuttia.
Ensimmäisten 30 minuutin aikana voi esittää kysymyksiä.
Ainoat sallitut työvälineet ovat kirjoitus- ja piirustusvälineet.

**Tehtävä 1.** Olkoon $\alpha \neq 0$ reaaliluku. Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joilla

$$xf(x+y) = (x+\alpha y)f(x) + xf(y)$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

**Tehtävä 2.** Olkoon $\mathbb{R}^+$ positiivisten reaalilukujen joukko. Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, joilla

$$\frac{f(a)}{1+a+ca} + \frac{f(b)}{1+b+ab} + \frac{f(c)}{1+c+bc} = 1$$

kaikilla $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, joille pätee $abc = 1$.

**Tehtävä 3.** Taululle on kirjoitettu positiiviset reaaliluvut $a_1, a_2, \ldots, a_{2024}$. Siirron aikana taululta valitaan luvut $x$ ja $y$, jotka pyyhitään pois, ja taululle kirjoitetaan luku $\dfrac{x^2+6xy+y^2}{x+y}$. 2023 siirron jälkeen taululle jää yksi luku, $c$. Osoita, että

$$c < 2024\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2024}\right).$$

**Tehtävä 4.** Määritä suurin reaaliluku $\alpha$ siten, että kaikilla epänegatiivisilla reaaliluvuilla $x, y, z$ pätee

$$(x+y+z)^3 + \alpha\left(x^2z + y^2x + z^2y\right) \geq \alpha\left(x^2y + y^2z + z^2x\right).$$

**Tehtävä 5.** Määritä kaikki positiiviset reaaliluvut $\lambda$, joilla kaikki lukujonot $a_1, a_2, \ldots$, jotka toteuttavat ehdon

$$a_{n+1} = \lambda \cdot \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$

kun $n \geq 2024^{2024}$, ovat rajoitettuja.

*Huomautus:* Positiivisten reaalilukujen jono $a_1, a_2, \ldots$ on *rajoitettu*, jos on olemassa reaaliluku $M$ siten, että $a_i < M$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots$

**Tehtävä 6.** *Labyrintti* koostuu 2024 luolasta ja 2023 toisiaan leikkaamattomasta (kaksisuuntaisesta) käytävästä, joista kukin yhdistää täsmälleen kaksi luolaa toisiinsa. Jokainen luolapari on yhdistetty jotakin käytävien ketjua pitkin. Siirron alussa Erik seisoo jotkin kaksi luolaa yhdistävässä käytävässä. Siirron aikana hän voi kävellä yhden näistä luolista läpi toiseen käytävään, joka yhdistää kyseisen luolan johonkin kolmanteen luolaan. Tällöin käytävä, jossa hän juuri oli, katoaa, ja se korvataan uudella käytävällä, joka yhdistää hänen uuden käytävänsä lopun edellisen alkuun (ts. jos Erik oli luolat $a$ ja $b$ yhdistävässä käytävässä ja käveli luolan $b$ läpi luolat $b$ ja $c$ yhdistävään käytävään, luolien $a$ ja $b$ välinen käytävä katoaa, ja luolien $a$ ja $c$ välille ilmestyy uusi käytävä).

Erik pitää labyrinttien suunnittelusta, ja hänellä on tietty pohjapiirros mielessä seuraavaansa varten. Hän pohtii, voiko hän muuttaa labyrintin siihen pohjapiirrokseen siirtoja käyttämällä. Osoita, että tämä on mahdollista riippumatta alkuperäisestä pohjapiirroksesta ja hänen alkusijainnistaan siellä.

**Tehtävä 7.** $45 \times 45$-laudasta on poistettu keskiruutu. Millä positiivisen kokonaisluvun $n$ arvoilla on mahdollista leikata jäljellä oleva alue $1 \times n$- ja $n \times 1$-suorakulmioihin?

**Tehtävä 8.** Olkoot $a$, $b$, $n$ positiivisia kokonaislukuja, joilla $a + b \leq n^2$. Matti ja Teppo pelaavat (alussa värittämättömällä) $n \times n$-laudalla peliä seuraavasti:

- Ensin Matti maalaa $a$ ruutua vihreäksi.
- Sitten Teppo maalaa $b$ muuta (ts. värittämätöntä) ruutua siniseksi.

Matti voittaa, jos löytyy ei-sinisten ruutujen polku, joka alkaa vasemmasta alakulmasta ja päättyy oikeaan yläkulmaan (polku on ruutujen jono, jossa kahdella peräkkäisellä rudulla on aina yhteinen sivu), muuten Teppo voittaa. Määritä lukujen $a$, $b$ ja $n$ suhteen, kummalla pelaajista on voittostrategia.

**Tehtävä 9.** Olkoon $S$ äärellinen joukko. Funktio $f \colon S \to S$ on *$n$:s potenssi*, jos on olemassa funktio $g \colon S \to S$ siten että

$$f(x) = \underbrace{g(g(\ldots g(x)\ldots))}_{n \text{ kertaa}}$$

kaikilla $x \in S$, missä $n$ on jokin positiivinen kokonaisluku.

Olkoon funktio $f \colon S \to S$ $n$:s potenssi kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla $n$. Onko välttämättä totta, että $f(f(x)) = f(x)$ kaikilla $x \in S$?

**Tehtävä 10.** Pääilmansuuntien mukaan suunnatun äärettömän laudan ruudussa on sammakko. Sammakko tekee siirtoja, jotka koostuvat joko yhden tai kahden ruudun hypyistä suuntaan, johon se oli katsomassa, ja kääntymisestä seuraavien sääntöjen mukaan:

1) Jos sammakko tekee yhden ruudun hypyn, se kääntyy $90^\circ$ oikealle;

2) Jos sammakko tekee kahden ruudun hypyn, se kääntyy $90^\circ$ vasemmalle.

Onko sammakon mahdollista päästä täsmälleen 2024 ruudun päässä pohjoisessa sijaitsevaan ruutuun äärellisellä määrällä siirtoja, jos se katsoo alussa:

a) pohjoiseen;

b) itään?

**Tehtävä 11.** Olkoon $ABCD$ jännenelikulmio, ja olkoon $O$ tämän ympäripiirretyn ympyrän keskipiste. Oletetaan, että $AC$ ja $BD$ ovat kohtisuorat. Pisteet $X$ ja $Y$ ovat kolmion $BOD$ ympäripiirretyllä ympyrällä siten, että $\angle AXO = \angle CYO = 90^\circ$. Olkoon $M$ janan $AC$ keskipiste. Osoita, että $BD$ sivuaa kolmion $MXY$ ympäripiirrettyä ympyrää.

**Tehtävä 12.** Olkoon $ABC$ teräväkulmainen kolmio, jolla $AB < AC$, ja olkoon $\omega$ sen ympäripiirretty ympyrä. Olkoon $M$ ympyrän $\omega$ pisteen $A$ sisältävän kaaren $BC$ keskipiste. Olkoon $X \neq M$ piste ympyrällä $\omega$ siten, että $AX = AM$. Piste $E$ on kolmion $ABC$ sivulla $AC$ siten, että $EX = EC$. Piste $F$ on kolmion $ABC$ sivulla $AB$ siten, että $FX = FB$. Osoita, että $AE = AF$.

**Tehtävä 13.** Olkoon $ABC$ teräväkulmainen kolmio, ja olkoon $H$ sen ortokeskus. Olkoon $D$ piste kolmion $ABC$ ympäripiirretyn ympyrän ulkopuolella siten, että $\angle ABD = \angle DCA$. Suoran $AB$ peilaus suoran $BD$ yli leikkaa suoran $CD$ pisteessä $X$. Suoran $AC$ peilaus suoran $CD$ yli leikkaa suoran $BD$ pisteessä $Y$. Olkoon $P$ pisteen $X$ kautta kulkevan, suoran $AC$ kanssa kohtisuoran suoran ja pisteen $Y$ kautta kulkevan, suoran $AB$ kanssa kohtisuoran suoran leikkauspiste. Osoita, että pisteet $D$, $P$ ja $H$ ovat samalla suoralla.

**Tehtävä 14.** Olkoon $ABC$ teräväkulmainen kolmio, ja olkoon $\omega$ sen ympäripiirretty ympyrä. Kolmion $ABC$ korkeusjanat $AD$, $BE$ ja $CF$ leikkaavat pisteessä $H$. Piste $K$ valitaan suoralta $EF$ siten, että $KH \parallel BC$. Osoita, että pisteen $H$ peilaus suoran $KD$ yli on ympyrällä $\omega$.

**Tehtävä 15.** Tasossa on $N \geq 3$ pisteen joukko, jonka mitkään kolme pistettä eivät ole samalla suoralla. Joukon kolme pistettä $A$, $B$, $C$ muodostavat *itämerellisen kolmion*, jos mikään muu joukon piste ei ole kolmion $ABC$ ympäripiirretyllä ympyrällä. Oletetaan, että on olemassa ainakin yksi itämerellinen kolmio.

Osoita, että on olemassa vähintään $\dfrac{N}{3}$ itämerellistä kolmiota.

**Tehtävä 16.** Määritä kaikki yhdistetyt positiiviset kokonaisluvut $n$, joiden jokaista jakajaa $d$ kohti on olemassa kokonaisluvut $k \geq 0$ ja $m \geq 2$ siten, että $d = k^m + 1$.

**Tehtävä 17.** Onko olemassa äärettömän monta positiivisten kokonailukujen nelikkoa $(a, b, c, d)$, joilla luku $a^{a!} + b^{b!} - c^{c!} - d^{d!}$ on alkuluku, ja $2 \leq d \leq c \leq b \leq a \leq d^{2024}$?

**Tehtävä 18.** Positiiviset kokonaisluvut $a_1, a_2, \ldots$ muodostavat äärettömän lukujonon, missä $a_n \geq 2$ ja $a_{n+2}$ jakaa luvun $a_{n+1} + a_n$ kaikilla $n \geq 1$. Osoita, että on olemassa alkuluku, joka jakaa äärettömän monta lukujonon alkiota.

**Tehtävä 19.** Onko olemassa positiivista kokonaislukua $N$, joka on jaollinen vähintään 2024:llä eri alkuluvulla, ja jonka jakajilla $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = N$ luku

$$\frac{d_2}{d_1} + \frac{d_3}{d_2} + \ldots + \frac{d_k}{d_{k-1}}$$

on kokonaisluku?

**Tehtävä 20.** Positiiviset kokonaisluvut $a$, $b$, ja $c$ toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} (ab-1)^2 &= c\left(a^2+b^2\right) + ab + 1, \\ a^2 + b^2 &= c^2 + ab. \end{cases}$$

a) Osoita, että $c + 1$ on neliöluku.

b) Määritä kaikki ehdot toteuttavat kolmikot $(a, b, c)$.