

*Lauantaina 12 huhtikuuta 2014*

**Tehtävä 1.** Määritä kaikki sellaiset reaaliset vakiot  $t$ , että aina jos  $a$ ,  $b$  ja  $c$  ovat kolmion sivujen pituudet, niin myös  $a^2 + bct$ ,  $b^2 + cat$  ja  $c^2 + abt$  ovat.

**Tehtävä 2.** Olkoot  $D$  ja  $E$  kolmion  $ABC$  sivujen  $AB$  ja  $AC$  sisäpisteitä tässä järjestyksessä niin, että  $DB = BC = CE$ . Suorat  $CD$  ja  $BE$  leikkaavat pisteessä  $F$ . Osoita, että kolmion  $ABC$  sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste  $I$ , kolmion  $DEF$  ortokeskus  $H$  ja kolmion  $ABC$  ympäröidyn ympyrän kaaren  $BAC$  keskipiste  $M$  ovat samalla suoralla.

**Tehtävä 3.** Olkoon  $d(m)$  positiivisen kokonaisluvun  $m$  positiivisten tekijöiden lukumäärä ja olkoon  $\omega(m)$  luvun  $m$  erisuurten alkutekijöiden lukumäärä. Olkoon  $k$  positiivinen kokonaisluku. Osoita, että on olemassa äärettömän monta positiivista kokonaislukua  $n$ , joilla  $\omega(n) = k$  ja luku  $d(n)$  ei jaa lukua  $d(a^2 + b^2)$  millään positiivisilla kokonaisluvuilla  $a$  ja  $b$ , jotka toteuttavat ehdon  $a + b = n$ .

Sunnuntaina 13 huhtikuuta 2014

**Tehtävä 4.** Määritä kaikki kokonaisluvut  $n \geq 2$ , joilla on olemassa kokonaisluvut  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ , jotka toteuttavat ehdon, että jos  $0 < i < n$ ,  $0 < j < n$ ,  $i \neq j$  ja luku  $n$  jakaa luvun  $2i + j$ , niin  $x_i < x_j$ .

**Tehtävä 5.** Olkoon  $n$  positiivinen kokonaisluku. Meillä on  $n$  laatikkoa, joista jokaisessa on epänegatiivinen määrä helmiä. Jokaisella siirrolla saamme ottaa valitsemastamme laatikosta kaksi helmeä, heittää pois toisen helmistä ja laittaa toisen helmen toiseen valitsemaamme laatikkoon. Helmien alkuperäistä asettelua kutsutaan *ratkeavaksi*, jos on mahdollista saavuttaa äärellisellä (mahdollisesti nolllalla) siirrolla tilanne, jossa ei ole tyhjää laatikkoa. Määritä kaikki sellaiset alkuperäiset helmien asetelut, jotka eivät ole ratkeavia, mutta jotka muuttuvat ratkeviksi, kun yksi helmi lisätään johonkin laatikkoon riippumatta siitä, mihin laatikkoon helmi lisätään.

**Tehtävä 6.** Määritä kaikki funktiot  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jotka toteuttavat ehdon

$$f\left(y^2 + 2xf(y) + f(x)^2\right) = (y + f(x))(x + f(y))$$

kaikilla reaaliluvuilla  $x$  ja  $y$ .