Lauantaina 8 huhtikuuta 2017

Tehtävä 1. Olkoon $ABCD$ konveksi nelikulmio, jolle $\angle DAB = \angle BCD = 90°$ ja $\angle ABC > \angle CDA$. Olkoot Q ja R janojen BC ja CD pisteitä, tässä järjestyksessä, niin, että suora QR leikkaa suorat AB ja AD pisteissä P ja S, tässä järjestyksessä. Lisäksi $PQ = RS$. Olkoon janan BD keskipiste M ja janan QR keskipiste N. Osoita, että pisteet M, N, A ja C ovat samalla ympyrällä.

Tehtävä 2. Etsi pienin positiivinen kokonaisluku k, jota kohti on olemassa positiivisten kokonaislukujen $\mathbb{Z}_{>0}$ k-värinväritys ja funktio $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$, joka toteuttaa seuraavat kaksi ehtoa:

(i) Kaikille positiivisille kokonaisluvuille m, n, jotka ovat samanväriset, pätee $f(m+n) = f(m) + f(n)$.

(ii) On olemassa positiiviset kokonaisluvut m, n, joille $f(m+n) \neq f(m) + f(n)$.

Joukon $\mathbb{Z}_{>0}$ k-värin värityksessä jokainen kokonaisluku väritetään täsmälleen yhdellä k:sta väristä. Positiiviset kokonaisluvut m, n eivät ole välttämättä erisuuret kummassakaan ehdoista (i) tai (ii).

Tehtävä 3. Tasossa on 2017 suoraa, joista mitkään kolme eivät leikkaa samassa pisteessä. Turbo etana istuu täsmälleen yhdellä näistä suorista ja alkaa liukua suoraa pitkin seuraavalla tavalla: se liikkuu annetulla suoralla kunnes se saavuttaa kahden suoran leikkauspisteen. Leikkauspisteessä se päättää jatkaa matkaa toiselle suoralle kääntymällä oikealle tai vasemmalle ja vaihtaa kääntösuuntaansa jokaisessa leikkauspisteessä. Se voi vaihtaa suuntaansa vain leikkauspisteissä. Voiko olla olemassa jana, jonka se kulkee molempiin suuntiin matkansa aikana?

Aika: 4 tuntia ja 30 minuuttia
Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen

Sunnuntaina 9 huhtikuuta 2017

Tehtävä 4. Olkoon $n \geq 1$ kokonaisluku ja olkoot $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ positiivisia kokonaislukuja. $t_n + 1$ ihmisen ryhmässä pelataan jokin määrä shakkipelejä. Kaksi henkilöä voivat pelata toisiaan vastaan enintään kerran. Osoita, että seuraavat kaksi ehtoa voivat olla voimassa samanaikaisesti:

(i) Jokainen on pelannut jonkin luvuista $t_1, t_2, \ldots, t_n$ määrän pelejä.

(ii) Jokaista indeksiä i, $1 \leq i \leq n$, kohti joku on pelannut täsmälleen t_i shakkipeliä.

Tehtävä 5. Olkoon $n \geq 2$ kokonaisluku. Ei välttämättä erisuurten positiivisten kokonaislukujen n-tupla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ on *kallis*, jos on olemassa positiivinen kokonaisluku k, jolla

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdot \ldots \cdot (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

a) Etsi kaikki kokonaisluvut $n \geq 2$, joilla on olemassa kallis n-tupla.

b) Osoita, että jokaista paritonta positiivista kokonaislukua m kohti on olemassa kokonaisluku $n \geq 2$, jolla m kuuluu kalliiseen n-tuplaan.

Yhtälön vasemmalla puolella on täsmälleen n tekijää.

Tehtävä 6. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, jonka mitkään kaksi sivua eivät ole yhtä pitkät. Kolmion ABC painopisteen G ja ympäri piirretyn ympyrän keskipisteen O peilaukset sivujen BC, CA, AB suhteen ovat G_1, G_2, G_3 ja O_1, O_2, O_3, vastaavasti. Osoita, että kolmioiden G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A ja ABC ympäri piirretyillä ympyröillä on yhteinen piste.

Kolmion painopiste on sen kolmen mediaanin leikkauspiste. Mediaani on jana, joka yhdistää kolmion kärjen vastakkaisen sivun keskipisteeseen.

Aika: 4 tuntia ja 30 minuuttia
Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen