*Tiistaina 4. huhtikuuta 2019*

**Tehtävä 1.** Määritä kaikki reaalilukukolmikot $(a, b, c)$, jotka toteuttavat ehdot $ab + bc + ca = 1$ ja

$$a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b.$$

**Tehtävä 2.** Olkoon $n$ positiivinen kokonaisluku. $2n \times 2n$-laudalle asetetaan dominoita niin, että jokaisella laudan ruudulla on täsmälleen yksi vierekkäinen ruutu, joka on peitetty dominolla. Määritä kaikilla $n$ suurin mahdollinen määrä dominoita, jotka voidaan asettaa näin laudalle.

(*Domino* on palikka, jonka koko on $2 \times 1$ tai $1 \times 2$. Dominot asetetaan laudalle niin, että jokainen domino peittää täsmälleen kaksi laudan ruutua ja dominot eivät mene päällekkäin. Kaksi ruutua ovat vierekkäisiä, jos ne ovat eri ruutu ja niillä on yhteinen sivu.)

**Tehtävä 3.** Olkoon $ABC$ kolmio, jolla $\angle CAB > \angle ABC$ ja olkoon $I$ sen sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste. Olkoon $D$ sellainen piste janalla $BC$, jolla $\angle CAD = \angle ABC$. Olkoon $\omega$ se ympyrä, joka sivuaa suoraa $AC$ pisteessä $A$ ja kulkee pisteen $I$ kautta. Olkoon $X$ ympyrän $\omega$ ja kolmion $ABC$ ympäripiirretyn ympyrän toinen leikkauspiste. Osoita, että kulmien $\angle DAB$ ja $\angle CXB$ puolittajat leikkaavat pisteessä, joka on suoralla $BC$.



Aikaa 4 tuntia ja 30 minuuttia
Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen

*Keskiviikkona 10 huhtikuuta 2019*

**Tehtävä 4.** Olkoon $ABC$ kolmio, jonka sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste on $I$. Suoraa $AI$ pisteessä $I$ sivuava pisteen $B$ kautta kulkeva ympyrä leikkaa sivun $AB$ jälleen pisteessä $P$. Suoraa $AI$ pisteessä $I$ sivuava pisteen $C$ kautta kulkeva ympyrä leikkaa sivun $AC$ jälleen pisteessä $Q$. Osoita, että suora $PQ$ sivuaa kolmion $ABC$ sisäänpiirrettyä ympyrää.

**Tehtävä 5.** Olkoon $n \geq 2$ kokonaisluku ja olkoot $a_1, a_2, \dots a_n$ positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että on olemassa positiiviset kokonaisluvut $b_1, b_2, \dots, b_n$, jotka toteuttavat seuraavat kolme ehtoa:

(A) $a_i \leq b_i$, kun $i = 1, 2, \dots, n$;

(B) lukujen $b_1, b_2, \dots, b_n$ jakojäännökset luvulla $n$ jaettaessa ovat pareittain erisuuria; ja

(C) $b_1 + \cdots + b_n \leq n \left( \dfrac{n-1}{2} + \left\lfloor \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$.

(Merkintä $\lfloor x \rfloor$ tarkoittaa reaaliluvun $x$ kokonaisosaa, eli suurinta kokonaislukua, joka ei ole suurempi kuin $x$.)

**Tehtävä 6.** Alina piirtää ympyrälle 2019 jännettä, joiden kaikki päätepisteet ovat eri pisteitä. Pistettä kutsutaan *merkityksi*, jos se on joko

(i) jokin jänteiden 4038 päätepisteestä; tai

(ii) ainakin kahden jänteen leikkauspiste.

Alina nimeää jokaisen merkityn pisteen kirjoittamalla sen viereen kokonaisluvun. Alina nimeää ehdon (i) toteuttavista 4038 pisteestä 2019 pistettä luvulla 0 ja loput 2019 pistettä luvulla 1. Hän nimeää ehdon (ii) toteuttavat pisteet mielivaltaisilla kokonaisluvuilla (joiden ei välttämättä tarvitse olla positiivisia).

Jokaisella jänteellä Alina tarkastelee janoja, jotka ovat kahden peräkkäisen merkityn pisteen välissä. (Sellaisella jänteellä, jolla on $k$ merkittyä pistettä, on $k-1$ tällaista janaa.) Hän kirjoittaa jokaisen sellaisen janan viereen keltaisella janan kahden päätepisteen lukujen summan ja sinisellä niiden erotuksen itseisarvon.

Alina huomaa, että keltaiset luvut, joita on $N + 1$ kappaletta saavat kaikki arvot $0, 1, \dots, N$ täsmälleen kerran. Osoita, että ainakin yksi sininen luku on luvun 3 monikerta.

(*Jänne* on jana, joka yhdistää kaksi ympyrän kaaren eri pistettä.)



Aikaa 4 tuntia ja 30 minuuttia
Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen