EGMO 2021
GEORGIA
KUTAISI

Language: **Finnish**

Day: **1**

Sunnuntai, 11.4.2021

Tehtävä 1. Luku 2021 on *ihku*. Jos yksikään joukon $\{m, 2m+1, 3m\}$ alkio on ihku, kun m on positiivinen kokonaisluku, niin ne kaikki ovat ihkuja. Seuraako tästä, että luku 2021^{2021} on ihku?

Tehtävä 2. Määritä kaikki funktiot $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, joilla yhtälö

$$f(xf(x)+y) = f(y) + x^2$$

pätee kaikilla rationaaliluvuilla x ja y.

Tässä $\mathbb{Q}$ tarkoittaa rationaalilukujen joukkoa.

Tehtävä 3. Olkoon ABC kolmio, jossa on tylppä kulma A. Olkoot E ja F ne pisteet, joissa kulman A ulkokulman puolittaja leikkaa kolmion ABC kärkien B ja C kautta kulkevat korkeusjanat tai niiden jatkeet (tässä järjestyksessä). Olkoot M ja N sellaiset janojen EC ja FB pisteet (tässä järjestyksessä), että $\angle EMA = \angle BCA$ ja $\angle ANF = \angle ABC$. Osoita, että pisteet E, F, N, M ovat ympyrällä.

Language: Finnish

Aika: 4 tuntia ja 30 minuuttia
Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen

Jotta kilpailu olisi mukava ja reilu kaikille, älä mainitse tai viittaa mitenkään kilpailutehtäviin internetissä tai sosiaalisessa mediassa ennen kuin tiistaina 13.4. klo 15:00 (Suomen kesäaikaa).

Maanantai, 12.4.2021

Tehtävä 4. Olkoon kolmion ABC sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste I ja olkoon D mielivaltainen piste sivulla BC. Pisteen D kautta kulkeva suoran BI kanssa kohtisuora suora leikkaa suoran CI pisteessä E. Pisteen D kautta kulkeva suoran CI kautta kohtisuora suora leikkaa suoran BI pisteessä F. Todista, että pisteen A peilaus suoran EF suhteen on suoralla BC.

Tehtävä 5. Tasossa on erityinen piste O, jota kutsutaan origoksi. Olkoon P tason 2021 pisteen joukko, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

(i) mitkään joukon P kolme pistettä eivät ole samalla suoralla ja

(ii) mitkään kaksi joukon P pistettä eivät ole suoralla, joka kulkee origon kautta.

Kutsutaan kolmiota *pulleaksi*, jos sen kärjet ovat joukossa P ja piste O on aidosti kolmion sisäpuolella. Määritä pulleiden kolmioiden suurin mahdollinen lukumäärä.

Tehtävä 6. Onko olemassa epänegatiivista kokonaislukua a, jolle yhtälöllä

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$

on yli miljoona eri ratkaisua (m, n), missä m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja?

Lauseke $\lfloor x \rfloor$ tarkoittaa reaaliluvun x kokonaisosaa (lattiaa). Esimerkiksi $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = \lfloor 22/7 \rfloor = 3$, $\lfloor 42 \rfloor = 42$ ja $\lfloor 0 \rfloor = 0$.

Aika: 4 tuntia ja 30 minuuttia
Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen

Jotta kilpailu olisi mukava ja reilu kaikille, älä mainitse tai viittaa mitenkään kilpailutehtäviin internetissä tai sosiaalisessa mediassa ennen kuin tiistaina 13.4. klo 15:00 (Suomen kesäaikaa).