



*Perjantai, 8.4.2022*

**Tehtävä 1.** Olkoon  $ABC$  teräväkulmainen kolmio, jossa on voimassa  $BC < AB$  ja  $BC < CA$ . Olkoon  $P$  sellainen piste janalla  $AB$  ja  $Q$  sellainen piste janalla  $AC$ , että  $P \neq B$ ,  $Q \neq C$  ja  $BQ = BC = CP$ . Olkoot  $T$  kolmion  $APQ$  ympäri piirretyn ympyrän keskipiste,  $H$  kolmion  $ABC$  ortokeskus ja  $S$  suorien  $BQ$  ja  $CP$  leikkauspiste. Osoita, että pisteet  $T$ ,  $H$  ja  $S$  ovat samalla suoralla.

**Tehtävä 2.** Olkoon  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  kaikkien positiivisten kokonaislukujen joukko. Etsi kaikki funktiot  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , joilla seuraavat kaksi ehtoa pätevät kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla  $a$  ja  $b$ :

- (1)  $f(ab) = f(a)f(b)$  ja
- (2) ainakin kaksi luvuista  $f(a)$ ,  $f(b)$  ja  $f(a + b)$  ovat yhtä suuret.

**Tehtävä 3.** Kutsutaan ääretöntä positiivisten kokonaislukujen jonoa  $a_1, a_2, \dots$  *hyväksi*, jos

- (1)  $a_1$  on neliöluku ja
- (2) kullakin kokonaisluvuilla  $n \geq 2$ ,  $a_n$  on pienin positiivinen kokonaisluku, jolla

$$na_1 + (n - 1)a_2 + \dots + 2a_{n-1} + a_n$$

on neliöluku.

Osoita, että kutakin hyvää jonoa  $a_1, a_2, \dots$  kohti on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku  $k$ , että  $a_n = a_k$  kaikilla kokonaisluvuilla  $n \geq k$ .



Lauantai, 9.4.2022

**Tehtävä 4.** On annettu positiivinen kokonaisluku  $n \geq 2$ , selvitä suurin positiivinen kokonaisluku  $N$ , jota kohti on olemassa  $N + 1$  reaalilukua  $a_0, a_1, \dots, a_N$ , joilla

$$(1) \quad a_0 + a_1 = -\frac{1}{n} \text{ ja}$$

$$(2) \quad (a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}, \text{ kun } 1 \leq k \leq N - 1.$$

**Tehtävä 5.** Olkoon  $f(n, 2k)$  lukumäärä, joka kertoo kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla  $n, k$ , kuinka monella eri tavalla  $n \times 2k$ -lauta voidaan peittää täysin  $nk$  kappaleella kokoa  $2 \times 1$  olevilla domino-laatoilla. (Esimerkiksi on  $f(2, 2) = 2$  ja  $f(3, 2) = 3$ .)

Etsi kaikki sellaiset positiiviset kokonaisluvut  $n$ , että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla  $k$  luku  $f(n, 2k)$  on pariton.

**Tehtävä 6.** Olkoon  $ABCD$  jänneelikulmio, jonka ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on  $O$ . Kulmien  $A$  ja  $B$  sisäkulmien puolittajat leikkaavat toisensa pisteessä  $X$ , kulmien  $B$  ja  $C$  sisäkulmien puolittajat leikkaavat toisensa pisteessä  $Y$ , kulmien  $C$  ja  $D$  sisäkulmien puolittajat leikkaavat toisensa pisteessä  $Z$  sekä kulmien  $D$  ja  $A$  sisäkulmien puolittajat leikkaavat toisensa pisteessä  $W$ . Lisäksi, olkoon suorien  $AC$  ja  $BD$  leikkauspiste  $P$ . Oletetaan, että pisteet  $X, Y, Z, W, O$  ja  $P$  ovat eri pisteitä.

Osoita, että pisteet  $O, X, Y, Z$  ja  $W$  ovat samalla ympyrällä jos ja vain jos pisteet  $P, X, Y, Z$  ja  $W$  ovat samalla ympyrällä.