



Language: Finnish

Day: 1

*Lauantaina 15.4.2023*

**Tehtävä 1.** Tarkastellaan  $n \geq 3$  positiivista reaalilukua  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Kullakin  $1 \leq i \leq n$  määritellään  $b_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{a_i}$  (oletetaan lisäksi, että  $a_0 = a_n$  ja  $a_{n+1} = a_1$ ). Oletetaan, että kaikilla  $i$  ja  $j$ , jotka toteuttavat ehdon  $1 \leq i, j \leq n$ , pätee  $a_i \leq a_j$  jos ja vain jos  $b_i \leq b_j$ .

Todista, että  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

**Tehtävä 2.** Tarkastellaan teräväkulmaista kolmiota  $ABC$ . Olkoon  $D$  se piste kolmion  $ABC$  ympäripiirretyllä ympyrällä, että  $AD$  on halkaisija. Oletetaan, että pisteet  $K$  ja  $L$  ovat janoilla  $AB$  ja  $AC$  (tässä järjestyksessä) ja että  $DK$  ja  $DL$  ovat ympyrän  $AKL$  tangentteja.

Osoita, että suora  $KL$  kulkee kolmion  $ABC$  ortokeskuksen läpi.

*Kolmion ortokeskus on kolmion korkeusjanojen leikkauspiste.*

**Tehtävä 3.** Olkoon  $k$  positiivinen kokonaisluku. Lexillä on sanasto  $\mathcal{D}$ , joka sisältää joitakin  $k$  merkin pituisia jonoja, jotka muodostuvat vain kirjaimista  $A$  ja  $B$ . Lexi haluaisi kirjoittaa kirjaimen  $A$  tai kirjaimen  $B$  jokaiseen  $k \times k$ -ruudukon ruutuun niin, että jokainen sarake muodostaa sanastoon  $\mathcal{D}$  kuuluvan sanan luettaessa ylhäältä alaspäin ja jokainen rivi muodostaa sanastoon  $\mathcal{D}$  kuuluvan sanan luettaessa vasemmalta oikealle.

Mikä on pienin kokonaisluku  $m$  niin, että jos  $\mathcal{D}$  sisältää vähintään  $m$  eri jonoa, niin Lexi pystyy täyttämään ruudukon näin riippumatta siitä, mitkä jonot on sanastossa  $\mathcal{D}$ ?

Language: Finnish

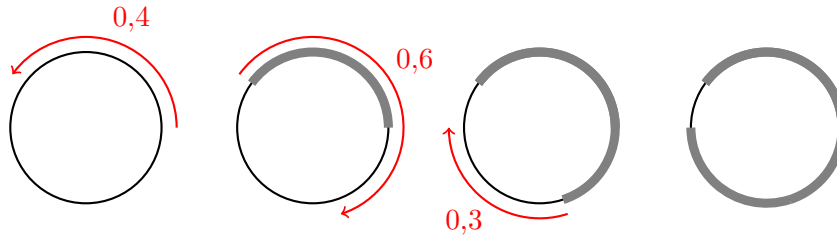
Aika: 4 tuntia ja 30 minuuttia  
Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen

**Tehtävät on pidettävä salassa sunnuntaihin 16. huhtikuuta klo 22:00 UTC asti (00:00 (maanantai) Keski-Euroopan kesäaikaa).**

Sunnuntaina 16.4.2023

**Tehtävä 4.** Turbo-etana on ympyrän kehällä. Kehän pituus on 1. Kun Turbo-etanalle annetaan ääretön jono positiivisia reaalilukuja  $c_1, c_2, c_3, \dots$ , Turbo-etana liikkuu lukujen  $c_1, c_2, c_3, \dots$  verran ympyrän kehällä, joka kerta valiten erikseen menevänsä joko myötä- tai vastapäivään.

Esimerkiksi, jos jono olisi  $c_1; c_2; c_3; \dots$  on  $0,4; 0,6; 0,3; \dots$ , niin Turbo saattaisi edetä seuraavalla tavalla:



Määritä suurin vakio  $C > 0$ , jolla on seuraava ominaisuus: jokaisella reaalilukujonolla  $c_1, c_2, c_3, \dots$ , jolla  $c_i < C$  kaikilla  $i$ , Turbo-etana voi (tarkasteltuaan jonoa) varmistaa, että ympyrän kehällä on jokin piste, johon se ei koskaan osu, ja jonka yli se ei koskaan liiku.

**Tehtävä 5.** Olkoon  $s \geq 2$  annettu positiivinen kokonaisluku. Jokaisella positiivisella kokonaisluvulla  $k$  määritellään sen *käännös*  $k'$  seuraavasti: kirjoitetaan  $k$  muodossa  $as+b$ , missä  $a, b$  ovat epänegatiivisia kokonaislukuja ja  $b < s$ . Silloin  $k' = bs+a$ . Olkoon  $n$  positiivinen kokonaisluku. Tarkastellaan ääretöntä jonoa  $d_1, d_2, \dots$  missä  $d_1 = n$  ja  $d_{i+1}$  on luvun  $d_i$  käännös kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla  $i$ .

Osoita, että tässä jonossa on luku 1 jos ja vain jos jakojäännös on 1 tai  $s$ , kun luku  $n$  jaetaan luvulla  $s^2 - 1$ .

**Tehtävä 6.** Olkoon  $ABC$  kolmio, jonka ympäröity ympyrä on  $\Omega$ . Olkoot  $S_b$  ja  $S_c$  (tässä järjestyksessä) keskipisteet niillä kaarilla  $AC$  ja  $AB$ , joilla ei ole kolmatta kärkeä. Olkoon  $N_a$  keskipiste kaarella  $BAC$  (se kaari  $BC$ , joka sisältää pisteen  $A$ ). Olkoon  $I$  kolmion  $ABC$  sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste. Olkoon  $\omega_b$  se ympyrä, joka sivuaa suoraa  $AB$  ja sisäpuolelta sivuaa ympyrää  $\Omega$  pisteessä  $S_b$ , ja olkoon  $\omega_c$  se ympyrä, joka sivuaa suoraa  $AC$  ja sisäpuolelta sivuaa ympyrää  $\Omega$  pisteessä  $S_c$ . Osoita, että suora  $IN_a$ , ja ympyröiden  $\omega_b$  ja  $\omega_c$  leikkauspisteiden kautta kulkeva suora leikkaavat toisensa ympyrällä  $\Omega$ .

*Kolmion sisäänpiirretty ympyrä on se ympyrä, joka on kolmion sisällä ja sivuaa kolmion kaikkia sivuja.*

Language: Finnish

Aika: 4 tuntia ja 30 minuuttia  
Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen

**Tehtävät on pidettävä salassa 16. huhtikuuta klo 22:00 UTC asti (00:00 (maanantai) Keski-Euroopan kesäaikaa).**