



Language: Finnish

Day: 1

Lauantai, 13.4.2024

Tehtävä 1. Taululle on kirjoitettu kaksi eri kokonaislukua u ja v . Tehdään sarja operaatioita. Jokaisessa operaatiossa teemme yhden seuraavista kahdesta operaatiosta:

- (i) Jos a ja b ovat taululla olevia eri kokonaislukuja, taululle voidaan kirjoittaa luku $a + b$, jos se ei ole jo taululla.
- (ii) Jos a, b ja c ovat kolme taululla olevaa eri kokonaislukua, ja jos kokonaisluku x toteuttaa $ax^2 + bx + c = 0$, niin luku x voidaan kirjoittaa taululle, jos se ei ole jo taululla.

Määritä kaikki aloituslukuparit (u, v) , joista voidaan kirjoittaa mikä tahansa kokonaisluku taululle äärellisen määrän operaatioita jälkeen.

Tehtävä 2. Tarkastellaan kolmiota ABC , jossa $AC > AB$. Olkoon Ω kolmion ympäri piirretty ympyrä ja I sisään piirretyn ympyrän keskipiste. Kolmion ABC sisään piirretty ympyrä leikkaa sivut BC, CA, AB pisteissä D, E, F , tässä järjestyksessä. Olkoon X ja Y kaksi pistettä sisäänpiirretyn ympyrän lyhyemmällä kaarilla \widehat{DF} ja \widehat{DE} , tässä järjestyksessä, niin että $\angle BXD = \angle DYC$. Leikatkaa suorat XY ja BC pisteessä K . Olkoon T piste ympyrällä Ω siten, että KT on ympyrän Ω tangentti ja T on samalla puolella suoraa BC kuin piste A . Todista, että suorat TD ja AI leikkaavat ympyrällä Ω .

Tehtävä 3. Kutsutaan positiivista kokonaislukua n *kummallisiksi*, jos mille tahansa luvun n positiiviselle tekijälle d kokonaisluku $d(d+1)$ jakaa $n(n+1)$. Todista, että mille tahansa neljälle kummalliselle positiiviselle kokonaisluvulle A, B, C ja D pätee seuraava:

$$\text{syt}(A, B, C, D) = 1.$$

Tässä $\text{syt}(A, B, C, D)$ on suurin positiivinen kokonaisluku, joka jakaa kaikki luvuista A, B, C ja D .

Language: Finnish

Aika: 4 tuntia ja 30 minuuttia
Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen



Language: Finnish

Day: 2

Sunnuntai, 14.4.2024

Tehtävä 4. Kokonaislukujen jonossa $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, lukupari (a_i, a_j) , jossa $1 \leq i < j \leq n$, on *mielenkiintoinen*, jos on olemassa kokonaislukupari (a_k, a_ℓ) , jossa $1 \leq k < \ell \leq n$, jolla pätee

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

Jokaiselle $n \geq 3$, etsi suurin mahdollinen mielenkiintoisten lukuparien määrä n -pituisessa jonossa.

Tehtävä 5. Olkoon \mathbb{N} positiivisten kokonaislukujen joukko. Etsi kaikki funktiot $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, joilla seuraavat ehdot ovat tosia kaikilla positiivisten kokonaislukujen pareilla (x, y) :

- (i) Luvulla x ja funktiolla $f(x)$ on sama määrä positiivisia tekijöitä.
- (ii) Jos x ei ole luvun y tekijä ja y ei ole luvun x tekijä, niin silloin

$$\text{syt}(f(x), f(y)) > f(\text{sy}(x, y)).$$

Tässä $\text{sy}(m, n)$ on suurin positiivinen kokonaisluku, joka jakaa molemmat m ja n .

Tehtävä 6. Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut d , joille on olemassa d -asteinen reaalilukukertoiminen polynomi P , jolla on enintään d eri arvoa joukossa $P(0), P(1), P(2), \dots, P(d^2 - d)$.

Language: Finnish

Aika: 4 tuntia ja 30 minuuttia
Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen