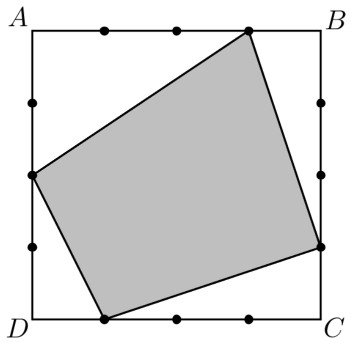
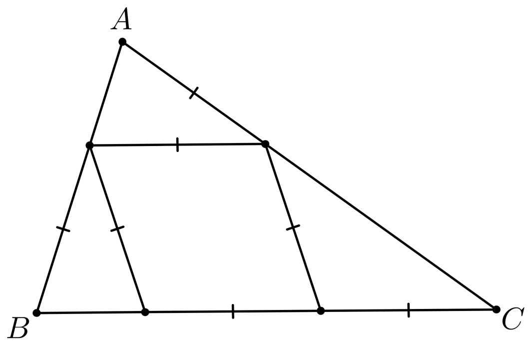
Iranin 4. Geometriaolympialaisten tehtävät 2017 (Perustaso)

Aikaa 4 tuntia. Tehtävistä ei saa keskustella verkossa ennen kuin ne on julkaistu IGO:n verkkosivuilla (www.igo-official.ir).

1. Neliön $ABCD$, jonka sivun pituus on 4, jokainen sivu on jaettu kolmella pisteellä neljään yhtä pitkään osaan. Valitse jokaiselta sivulta yksi näistä pisteistä ja yhdistä pisteet järjestyksessä myötäpäivään, jolloin saat nelikulmion. Mitä arvoja voi tämän nelikulmion pinta-ala saada? Kirjoita arvot ilman todistusta.



2. Määritä kolmion ABC kulmat.



3. Säännöllisen viisikulmion $ABCDE$ pisteestä C lähtevä ja sivua CD kohtisuorassa oleva suora leikkaa janan AB pisteessä F. Osoita, että $AE + AF = BE$.

4. Olkoot $P_1, P_2, \ldots, P_{100}$ 100 pistettä tasolla siten, että mitkään kolme niistä eivät ole samalla suoralla. Kutsutaan jokaista kolmen pisteen muodostamaa kolmiota myötäpäivään kulkevaksi kolmioksi, jos niiden pisteet sijaitsevat suurenevassa järjestyksessä myötäpäivään. Voiko myötäpäivään kulkevien kolmioiden lukumäärä olla tasan 2017?

5. Olkoon ABC tasakylkinen kolmio ($AB = AC$) ja l suoran BC kanssa yhdensuuntainen suora, joka kulkee pisteen A kautta. Olkoon D mielivaltainen piste suoralla l. Olkoot E ja F pisteestä A suorille BD ja CD piirrettyjen korkeusjanojen kanta (samassa järjestyksessä). Olkoot P ja Q pisteiden E ja F projektiot suoralle l. Osoita, että $AP + AQ \leq AB$.

Aikaa : 4 tuntia
Jokainen tehtävä on 8 pisteen arvoinen

Iranin 4. Geometriaolympialaisten tehtävät 2017 (Keskitaso)

Aikaa 4 tuntia ja 30 minuuttia. Tehtävistä ei saa keskustella verkossa ennen kuin ne on julkaistu IGO:n verkkosivuilla (www.igo-official.ir).

1. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, jossa $A = 60°$. Olkoot E ja F kulmista B ja C piirrettyjen korkeusjanojen kannat (samassa järjestyksessä). Osoita, että $CE - BF = \frac{3}{2}(AC - AB)$.

2. Kaksi ympyrää ω_1 ja ω_2 leikkaavat pisteissä A ja B. Mielivaltainen pisteen B kautta piirretty suora leikkaa ympyrät ω_1 ja ω_2 pisteissä C ja D (samassa järjestyksessä). Pisteet E ja F valitaan ympyröiltä ω_1 ja ω_2 (samassa järjestyksessä) siten, että $CE = CB$ ja $BD = DF$. Oletetaan, että BF leikkaa ympyrän ω_1 pisteessä P ja BE leikkaa ympyrän ω_2 pisteessä Q. Osoita, että A, P ja Q ovat samalla suoralla.

3. Tasolla on n pistettä ($n > 2$). Mitkään kolme niistä eivät ole samalla suoralla. Jokaisen kahden pisteen kautta piirretään suora, ja jäljelle jäävistä pisteistä merkataan se, joka on lähimpänä tätä suoraa (tämä piste sattuu olemaan aina yksikäsitteinen). Mikä on suurin mahdollinen määrä merkattuja pisteitä kaikille luvun n mahdollisille arvoille?

4. Olkoon ABC tasakylkinen kolmio ($AB = AC$) ja l suoran BC kanssa yhdensuuntainen suora, joka kulkee pisteen A kautta. Olkoon D mielivaltainen piste suoralla l. Olkoot E ja F pisteestä A suorille BD ja CD piirrettyjen korkeusjanojen kannat (samassa järjestyksessä). Olkoot P ja Q pisteiden E ja F projektiot suoralle l. Osoita, että $AP + AQ \leq AB$.

5. Olkoot X ja Y kaksi pistettä kolmion ABC sivulla BC siten, että $2XY = BC$ (X on pisteiden B ja Y välissä). Olkoon AA' kolmion AXY ympäri piirretyn ympyrän halkaisija. Olkoon P piste, jossa AX leikkaa pisteestä B piirretyn, sivua BC kohtaan kohtisuoran suoran ja Q piste, jossa AY leikkaa pisteestä C piirretyn, sivua BC kohtisuorassa olevan suoran. Osoita, että pisteen A' kautta piirretty suora, joka toimii tangenttina kolmion AXY ympäri piirretylle ympyrälle, kulkee kolmion APQ ympäri piirretyn ympyrän keskipisteen kautta.

Aikaa : 4 tuntia ja 30 minuuttia
Jokainen tehtävä on 8 pisteen arvoinen

Iranin 4. Geometriaolympialaisten tehtävät 2017 (Vaikea taso)

Aikaa 4 tuntia ja 30 minuuttia. Tehtävistä ei saa keskustella verkossa ennen kuin ne on julkaistu IGO:n verkkosivuilla (www.igo-official.ir).

1. Kolmion ABC sisään piirretty ympyrä, jonka keskipiste on I, sivuaa sivua BC pisteessä D. Suora DI leikkaa AC:n pisteessä X. Pisteestä X piirretty tangentti (eri kuin AC) kolmion sisään piirretylle ympyrälle leikkaa AB:n pisteessä Y. YI ja BC leikkaavat toisensa pisteessä Z. Osoita, että $AB = BZ$.

2. On annettu kuusi ympyrää, joista mitkään kaksi eivät leikkaa toisiaan, yksikään ei ole toisen sisällä ja joiden säteet ovat vähintään yhden pituiset. Osoita, että ympyrän, joka leikkaa kaikkia näitä kuutta ympyrää, säteen on oltava vähintään yksi.

3. Olkoon O kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Suora CO leikkaa kulmasta A piirretyn korkeusjanan pisteessä K. Olkoot P ja M janojen AK ja AC keskipisteet (tässä järjestyksessä). PO leikkaa sivun BC pisteessä Y ja kolmion BCM ympäri piirretty ympyrä leikkaa AB:n pisteessä X. Osoita, että nelikulmion $BXOY$ ympäri voidaan piirtää ympyrä.

4. Suora l on kolmen ympyrän ω_1, ω_2 ja ω_3 tangentti pisteissä A, B ja C (B sijaitsee pisteiden A ja C välissä) ja ω_2 sivuaa kahta muuta ympyrää siten, että yksikään ympyrä ei ole toisen sisällä. Olkoot X ja Y ympyrän ω_2 ja suoran, joka on ympyröitä ω_1 ja ω_3 toiselta puolelta suoraa l sivuava tangentti, leikkauspisteet. Pisteestä B suoraa l kohti kohtisuoraan piirretty suora leikkaa ympyrän ω_2 jälleen pisteessä Z. Osoita, että ympyrä, jonka halkaisija on AC, sivuaa suoria ZX ja ZY.

5. Pallo S sivuaa tasoa. Olkoot A, B, C, D neljä sellaista pistettä tasolla, että mitkään niistä eivät ole samalla suoralla. Tarkastellaan sellaista pistettä A', jolle tetraedrin $A'BCD$ tahkot toimivat pallon S tangenttina. Määritellään pisteet B', C' ja D' vastaavalla tavalla. Osoita, että pisteet A', B', C', D' sijaitsevat samalla tasolla ja että taso $A'B'C'D'$ sivuaa palloa S.

Aikaa : 4 tuntia ja 30 minuuttia
Jokainen tehtävä on 8 pisteen arvoinen