Iranin 5. Geometriaolympialaiset

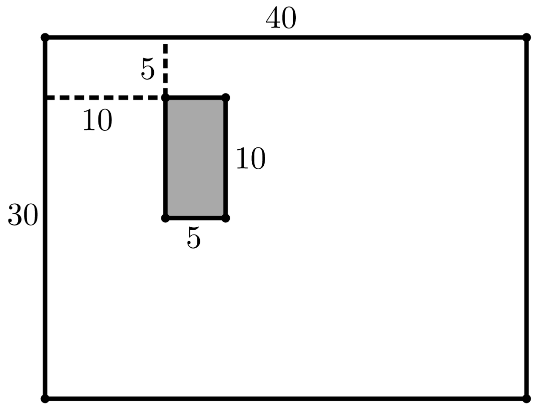
Perustaso

Perjantai, 7. syyskuuta, 2018

Tehtävät on pidettävä salassa, kunnes ne on julkaistu IGO:n virallisilla nettisivuilla: http://igo-official.ir .

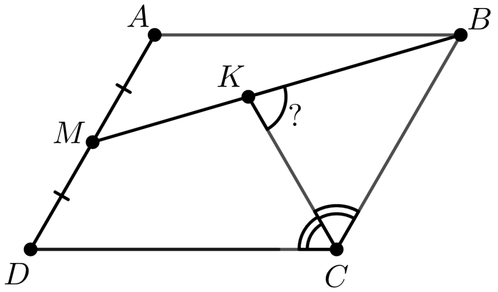
---

1 Paperilla, jonka koko on 40×30, on alla olevan kuvan mukaisesti täytetty 10×5-suorakulmio. Haluamme leikata tämän täytetyn suorakulmion paperista neljällä suoralla leikkauksella. Jokainen suora leikkaus on suora, joka jakaa paperin kahteen osaan, joista pidämme sen osan, jossa täytetty suorakulmio sijaitsee. Tavoite on minimoida leikkausten yhteenlaskettu pituus. Miten tämä päämäärä saavutetaan, ja mikä on kyseinen pienin mahdollinen pituus? Näytä oikeat leikkaukset ja kirjoita lopullinen vastaus. Vastausta ei tarvitse todistaa.



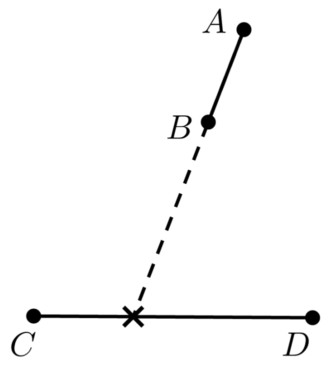
2 Konveksi kuusikulmio $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ sijaitsee toisen konveksin kuusikulmion $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ sisällä siten, että $A_1A_2 \parallel B_1B_2$, $A_2A_3 \parallel B_2B_3$,..., $A_6A_1 \parallel B_6B_1$. Osoita, että yksinkertaisten kuusikulmioiden $A_1B_2A_3B_4A_5B_6$ ja $B_1A_2B_3A_4B_5A_6$ pinta-alat ovat samat. (Yksinkertainen kuusikulmio on kuusikulmio, joka ei leikkaa itseään.)

3 Annetussa kuvassa $ABCD$ on suunnikas. Tiedämme, että $\angle D = 60°$, $AD = 2$ ja $AB = \sqrt{3}+1$. Piste M on janan AD keskipiste. Jana CK on kulman C puolittaja. Etsi kulma CKB.

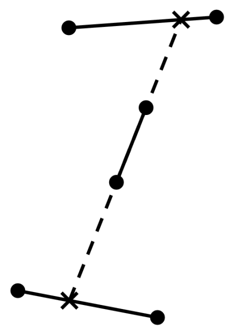


4 Kaksi ympyrää, joiden keskipisteet ovat O_1 ja O_2, sijaitsevat ympyrän ω sisällä ja sivuavat sitä. Ympyrän ω jänne AB sivuaa näitä kahta ympyrää siten, että ympyrät ovat jänteen eri puolilla. Osoita, että $\angle O_1AO_2 + \angle O_1BO_2 > 90°$.

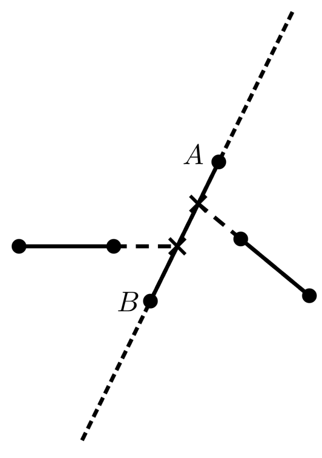
5 Tasossa on janoja, joista mitkään kaksi eivät leikkaa toisiaan (edes päätepisteissä). Sanomme, että jana AB **rikkoo** janan CD, jos janan AB jatke leikkaa janan CD jossakin pisteiden C ja D välisessä pisteessä.



(a) Onko mahdollista, että jokaiselle janalle pätee, että kun sitä jatketaan molemmista päistä, se rikkoo tasan yhden toisen janan kummastakin päästä?



(b) Janaa kutsutaan **piiritetyksi**, jos sen kummallakin puolella on tasan yksi jana, joka rikkoo sen. (*Esim.* jana AB kuvassa.) Onko mahdollista, että kaikki janat ovat piiritettyjä?

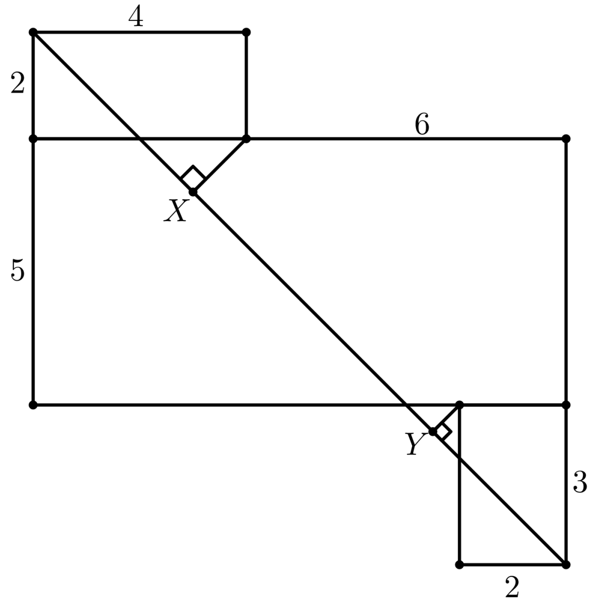


Aikaa: 4 tuntia.
Jokainen tehtävä on 8 pisteen arvoinen.

Iranin 5. Geometriaolympialaiset
Keskitaso
Perjantai, 7. syyskuuta, 2018
Tehtävät on pidettävä salassa, kunnes ne on julkaistu IGO:n virallisilla nettisivuilla:
http://igo-official.ir .

---

1 Alla olevassa kuvassa on kolme suorakulmiota. Joidenkin janojen pituudet on näytetty. Etsi janan XY pituus.



2 Konveksin nelikulmion $ABCD$ halkaisijat AC ja BD leikkaavat pisteessä P. Tiedämme, että $\angle DAC = 90°$ ja $2\angle ADB = \angle ACB$. Jos $\angle DBC + 2\angle ADC = 180°$, niin osoita, että $2AP = BP$.

3 Olkoot ω_1 ja ω_2 kaksi ympyrää, joiden keskipisteet ovat O_1 ja O_2 (samassa järjestyksessä). Nämä kaksi ympyrää leikkaavat toisensa pisteissä A ja B. Suora O_1B leikkaa ympyrän ω_2 toisen kerran pisteessä C, ja suora O_2A leikkaa ympyrän ω_1 toisen kerran pisteessä D. Olkoon X AC:n ja ympyrän ω_1 toinen leikkauspiste. Samoin Y on BD:n ja ympyrän ω_2 toinen leikkauspiste. Osoita, että $CX = DY$.

4 Tarkastellaan monitahokasta, jonka jokainen tahko on kolmio. Olkoon P mielivaltainen piste jollakin monitahokkaan särmällä siten, että P ei ole tämän särmän keskipiste tai päätepiste. Olkoon $P_0 = P$. Jokaisella askeleella P_i yhdistetään yhteen sellaisen tahkon massakeskipisteeseen, joka sisältää pisteen P_i. Tämä suora kohtaa tahkon piirin jälleen pisteessä P_{i+1}. Jatketaan tätä prosessia pisteellä P_{i+1} ja toisella tahkolla, joka sisältää pisteen P_{i+1}. Osoita, että jatkamalla tätä prosessia emme pysty kulkemaan kaikkien tahkojen läpi. (Kolmion massakeskipiste on sen mediaanien leikkauspiste.)

5 Olkoon $ABCD$ suunnikas, jossa $\angle DAC = 90°$. Olkoon H pisteestä A suoralle DC piirretyn korkeusjanan kantapiste, ja olkoon P sellainen piste suoralla AC, että suora PD on kolmion ABD ympäri piirretyn ympyrän tangentti. Osoita, että $\angle PBA = \angle DBH$.

Aikaa: 4 tuntia 30 minuuttia.
Jokainen tehtävä on 8 pisteen arvoinen.

Iranin 5. Geometriaolympialaiset

Vaativa taso

Perjantai, 7. syyskuuta, 2018

Tehtävät on pidettävä salassa, kunnes ne on julkaistu IGO:n virallisilla nettisivuilla: http://igo-official.ir .

---

1 Kaksi ympyrää ω_1 ja ω_2 leikkaavat toisensa pisteissä A ja B. Olkoon PQ näiden ympyröiden sellainen yhteinen tangentti, että $P \in \omega_1$ ja $Q \in \omega_2$. Mielivaltainen piste X sijaitsee ympyrällä ω_1. Suora AX leikkaa ympyrän ω_2 toisen kerran pisteessä Y. Piste $Y' \neq Y$ sijaitsee ympyrällä ω_2 siten, että $QY = QY'$. Suora $Y'B$ leikkaa ympyrän ω_1 toisen kerran pisteessä X'. Osoita, että $PX = PX'$.

2 Terävässä kolmiossa ABC pätee $\angle A = 45°$. Piste O on kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän keskipiste ja H on sen korkeusjanojen leikkauspiste. D on kärjestä B piirretyn korkeusjanan kantapiste. Piirretään ympyrä kolmion ADH ympäri. Piste X on tämän ympyrän kaaren AH se keskpiste, joka sisältää pisteen D. Osoita, että $DX = DO$.

3 Etsi kaikki sellaiset mahdolliset kokonaisluvun $n > 3$ arvot, että on olemassa konveksi n-kulmio, jonka jokainen lävistäjä on kohtisuorassa ainakin yhden toisen lävistäjän kanssa ja leikkaa tämän lävistäjän kahtia.

4 Nelikulmion $ABCD$ ympäri on piirretty ympyrä. Lävistäjät AC ja BD eivät ole toisiaan kohtaan kohtisuorassa. Näiden lävistäjien välisten kulmien kulmienpuolittajat leikkaavat janat AB, BC, CD ja DA pisteissä K, L, M ja N. Nelikulmion $KLMN$ ympäri voidaan piirtää ympyrä. Osoita, että myös nelikulmion $ABCD$ ympäri voidaan piirtää ympyrä.

5 $ABCD$ on nelikulmio, jonka ympäri voidaan piirtää ympyrä. Ympyrä, joka kulkee pisteiden A ja B kautta, sivuaa janaa CD pisteessä E. Toinen ympyrä, joka kulkee pisteiden C ja D kautta, sivuaa AB:tä pisteessä F. Piste G on AE:n ja DF:n leikkauspiste, ja piste H on BE:n ja CF:n leikkauspiste. Osoita, että kolmioiden AGF, BHF, CHE, DGE sisään piirrettyjen ympyröiden keskipisteet sijaitsevat samalla ympyrällä.

Aikaa: 4 tuntia 30 minuuttia.

Jokainen tehtävä on 8 pisteen arvoinen.