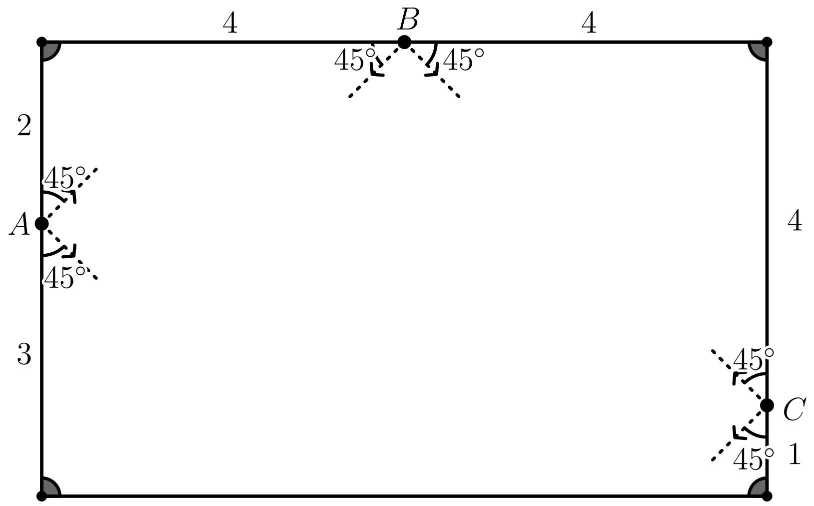
Iranin 6. Geometriaolympialaiset

Perustaso

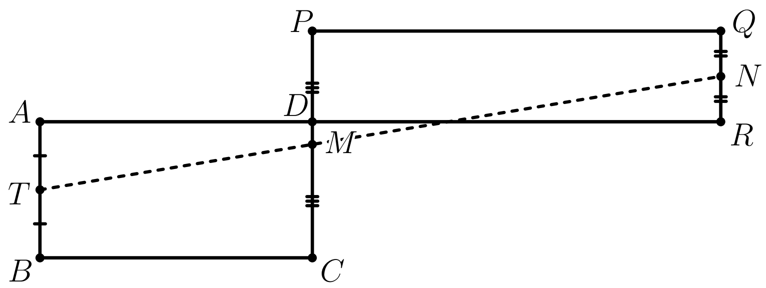
13. syyskuuta 2019

Kilpailutehtävät on pidettävä salassa kunnes ne julkaistaan virallisella IGO-internetsivustolla: igo-official.ir

1) Suorakulmion muotoisen 8×5-pöydän jokaisessa kulmassa on kolo. Kun ensimmäinen lyönti tehdään pisteestä A, B tai C kuvassa olevien suuntien mukaisesti, putoaako pallo johonkin koloista enintään kuuden reunasta kimpoamisen jälkeen? (Pallo kimpoaa reunasta samassa kulmassa kuin se on osunut reunaan.)



2) Kuten kuvassa näkyy, kahdella suorakulmiolla $ABCD$ ja $PQRD$ on sama pinta-ala, ja niiden vastaavat sivut ovat yhdensuuntaiset. Olkoot pisteet N, M ja T janojen QR, PC and AB keskipisteet vastaavasti. Osoita, että pisteet N, M ja T ovat samalla suoralla.



3) Tasossa on $n > 2$ suoraa yleisessä tilassa eli mitkä tahansa kaksi suorista leikkaavat, mutta mitkään kolme suorista eivät leikkaa samassa pisteessä. Merkitään jokainen leikkauspiste ja poistetaan sitten kaikki suorat, mutta jätetään leikkauspisteet. Ei tiedetä, mikä leikkauspiste liittyy mihinkin kahteen suoraan. Onko silti mahdollista selvittää, mitkä olivat alkuperäiset suorat ja palauttaa ne?

4) Nelikulmiossa $ABCD$ on voimassa

$$\angle DAC = \angle CAB = 60^\circ,$$

ja

$$AB = BD - AC.$$

Suorat AB ja CD leikkaavat toisensa pisteessä E. Osoita, että $\angle ADB = 2\angle BEC$.

5) Konveksissa monikulmiossa (eli jokainen kulma on alle 180°) lävistäjää kutsutaan *puolittajaksi*, jos se puolittaa sekä monikulmion alan että piirin. Mikä on suurin määrä puolittajia, joka konveksilla viisikulmiolla voi olla?

Aika: 4 tuntia ja 30 minuuttia.
Jokainen tehtävä on 8 pisteen arvoinen.

Iranin 6. Geometriaolympialaiset

Keskitaso

13. syyskuuta 2019

Kilpailutehtävät on pidettävä salassa kunnes ne julkaistaan virallisella IGO-internetsivustolla: igo-official.ir

1) Ympyrät ω_1 and ω_2, joiden keskipisteet ovat vastaavasti O_1 and O_2, leikkaavat toisensa pisteissä A ja B. Lisäksi piste O_1 on ympyrällä ω_2. Olkoon P mielivaltainen ympyrän ω_1 piste. Suorat BP, AP ja O_1O_2 leikkaavat ympyrän ω_2 toisen kerran pisteissä X, Y ja C tässä järjestyksessä. Osoita, että nelikulmio $XPYC$ on suunnikas.

2) Etsi kaikki nelikulmiot $ABCD$, joilla kaikki neljä kolmiota DAB, CDA, BCD ja ABC ovat keskenään yhdenmuotoisia.

   Huomautus: Tässä tehtävänannossa kolmioiden kärkien järjestyksellä ei ole oleellista yhdenmuotoisuutta tarkasteltaessa. Esimerkiksi kolmion ABC kärki A voi vastata mitä tahansa kärkeä kolmiossa BCD.

3) Kolme ympyrää ω_1, ω_2 ja ω_3 kulkevat pisteen P kautta. Pisteen P kautta kulkeva ympyrän ω_1 tangentti leikkaa ympyrät ω_2 ja ω_3 toisen kerran pisteissä $P_{1,2}$ and $P_{1,3}$ vastaavasti. Pisteet $P_{2,1}$, $P_{2,3}$, $P_{3,1}$ ja $P_{3,2}$ määritellään vastaavalla tavalla. Osoita, että janojen $P_{1,2}P_{1,3}$, $P_{2,1}P_{2,3}$ ja $P_{3,1}P_{3,2}$ keskinormaalit leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

4) Olkoon $ABCD$ suunnikas sekä olkoon K sellainen piste suoralla AD, että pätee $BK = AB$. Olkoon P mielivaltainen piste AB:llä, ja oletetaan, että janan PC keskinormaali leikkaa kolmion APD ympäri piirretyn ympyrän pisteissä X, Y. Osoita, että kolmion ABK ympäri piirretty ympyrä kulkee kolmion AXY ortokeskuksen kautta.

5) Olkoon ABC kolmio, jossa on $\angle A = 60°$. Pisteet E ja F ovat kulmien B ja C kulmanpuolittajien kantapisteet tässä järjestyksessä. Tarkastellaan sellaisia pisteitä P ja Q, että nelikulmiot $BFPE$ ja $CEQF$ ovat suunnikkaita. Osoita, että $\angle PAQ > 150°$. (Tarkastele sitä kulmaa $\angle PAQ$, joka ei sisällä kolmion sivua AB.)

Aika: 4 tuntia 30 minuuttia.
Kukin tehtävä on 8 pisteen arvoinen.

Iranin 6. Geometriaolympialaiset

Vaativin taso

13. syyskuuta 2019

Kilpailutehtävät on pidettävä salassa kunnes ne julkaistaan virallisella IGO-internetsivustolla: igo-official.ir

1) Ympyrät ω_1 ja ω_2 leikkaavat toisensa pisteissä A ja B. Olkoon C sellainen piste pisteen A kautta kulkevalla ympyrän ω_1 tangentilla, että on $\angle ABC = 90°$. Mielivaltainen suora ℓ kulkee pisteen C kautta ja leikkaa ympyrän ω_2 pisteissä P and Q. Suorat AP ja AQ leikkaavat ympyrän ω_1 toisen kerran pisteissä X and Z vastaavasti. Olkoon Y pisteen A kautta piirretyn korkeusjanan kantapiste suoralla ℓ. Osoita, että pisteet X, Y ja Z ovat samalla suoralla.

2) Onko seuraava väite totta jokaisessa n-kulmiossa, missä $n > 3$: On olemassa sellainen kärki ja lävistäjä, joka kulkee tämän kärjen kautta, että ne kulmat, jotka ovat monikulmion sisällä, joiden toinen kylki on tarkasteltava lävistäjä ja toinen tarkasteltavasta kärjestä lähtevä monikulmion kylki, ovat teräviä?

3) Ympyröiden ω_1 ja ω_2 keskipisteet ovat O_1 ja O_2 vastaavasti. Nämä kaksi ympyrää leikkaavat toisensa pisteissä X ja Y. Suora AB on näiden molempien ympyröiden tangentti, piste A on ympyrällä ω_1 ja B ympyrällä ω_2. Ympyröiden ω_1 ja ω_2 pisteen X kautta piirretyt tangentit leikkaavat suoran O_1O_2 pisteissä K ja L vastaavasti. Oletetaan, että suora BL leikkaa ympyrän ω_2 toisen kerran pisteessä M ja suora AK leikkaa ympyrän ω_1 toisen kerran pisteessä N. Osoita, että suorat AM, BN ja O_1O_2 leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

4) On annettu teräväkulmainen kolmio ABC, joka ei ole tasakylkinen ja jonka ympäri piirretty ympyrä on Γ. Piste M on janan BC keskipiste ja N on ympyrän Γ kaaren $\overset{\frown}{BC}$ (joka ei sisällä pistettä A) keskipiste. Pisteet X ja Y ovat sellaiset ympyrän Γ pisteet, joille pätee $BX \parallel CY \parallel AM$. Oletetaan, että janalla BC on olemassa sellainen piste Z, että kolmion XYZ ympäri piirretty ympyrä on kohtisuorassa BC:tä vasten. Olkoon ω kolmion ZMN ympäri piirretty ympyrä. Suora AM leikkaa ympyrän ω toisen kerran pisteessä P. Olkoot K sellainen piste ympyrällä ω, että $KN \parallel AM$, ω_b ympyrä, joka kulkee pisteiden B, X kautta ja jonka tangentti on BC sekä ω_c ympyrä, joka kulkee pisteiden C, Y kautta ja jonka tangentti on BC. Osoita, että ympyrä, jonka keskipiste on K ja säde KP, on kohtisuorassa kolmea ympyrää ω_b, ω_c ja Γ vasten.

5) Olkoot pisteet A, B ja C sellaiset pisteet paraabelilla Δ, että kolmion ABC ortokeskus H on myös paraabelin Δ polttopiste. Osoita, että sellaisilla pisteiden A, B ja C sijaintien vaihdoilla paraabelilla Δ, joissa ortokeskus pysyy pisteessä H, kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän säde pysyy muuttumattomana.

Aika: 4 tuntia ja 30 minuuttia.
Kukin tehtävä on 8 pisteen arvoinen.