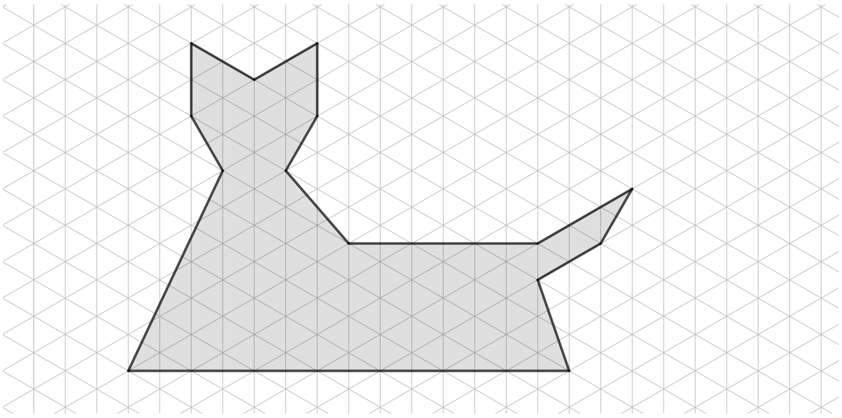
7. Iranin geometriaolympialaiset

Perustaso

30. lokakuuta 2020

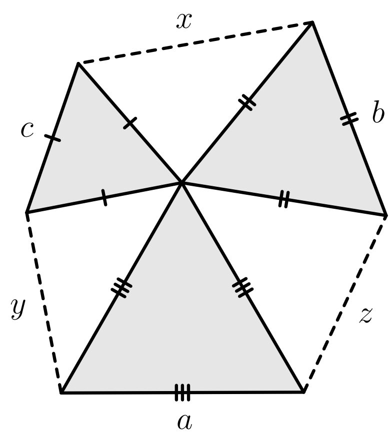
Kilpailun tehtävät on pidettävä salassa kunnes ne on julkaistu IGO:n nettisivuilla: igo-official.ir

Tehtävä 1. Kutsumme monikulmioista muodostuvalle paperille piirrettyä janaa, jonka kohdalta taitamme paperin, *taitteeksi*. Meille on annettu kuvan mukainen kuvio. Leikkaamme paperin varjostetun alueen reunoja myöten saadaksemme monikulmion muotoisen paperin.
Aloita tällä varjostetulla monikulmiolla ja muodosta siitä suorakulmion muotoinen paperi korkeintaan 5:llä taitteella. Kuvaa ratkaisusi esittämällä taitesuorat ja piirtämällä kuvio jokaisen taitteen jälkeen ratkaisupaperillesi.
(Huomaa, että taitteiden ei tarvitse seurata kuvion ruudukkoviivoja.)



Tehtävä 2. Olkoon $ABCD$ suunnikas ($AB \neq BC$). Valitsemme pisteet E ja G suoralta CD siten, että AC on kummankin kulman $\angle EAD$ ja $\angle BAG$ puolittaja. Suora BC leikkaa suoran AE pisteessä F ja suoran AG pisteessä H. Osoita, että suora FG kulkee janan HE keskipisteen kautta.

Tehtävä 3. Kuvan mukaisella kolmella tasasivuisella kolmiolla, joiden sivuden pituudet ovat a, b, c, on yksi yhteinen kärki eikä niillä ole mitään muuta yhteistä pistettä. Pituudet x, y ja z on määritelty kuten kuvassa. Osoita, että $3(x + y + z) > 2(a + b + c)$.



Tehtävä 4. Olkoon P mielivaltainen piste kolmion ABC sisällä. Suora BP leikkaa AC:n pisteessä E ja suora CP leikkaa AB:n pisteessä F. Olkoon K janan BF keskipiste ja L janan CE keskipiste. Pisteen L kautta kulkeva suora, joka on yhdensuuntainen suoran CF kanssa, leikkaa BC:n pisteessä S ja pisteen K kautta kulkeva suora, joka on yhdensuuntainen suoran BE kanssa, leikkaa BC:n pisteessä T; olkoon M pisteen S peilaus pisteen L suhteen ja piste N pisteen T peilaus pisteen K suhteen. Osoita, että kun P liikkuu kolmion ABC sisällä, niin suora MN kulkee kiinnitetyn pisteen läpi.

Tehtävä 5. Sanomme, että kaksi yksinkertaisen monikulmion kärkeä ovat *näkyvillä* toisilleen jos ne ovat vierekkäisiä tai jos niitä yhdistävä jana on täysin monikulmion sisällä (lukuunottamatta reunalla olevia kahta päätepistettä). Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joille on olemassa yksinkertainen monikulmio, jossa on n kärkeä ja jossa jokainen kärki on näkyvillä tasan 4:stä toisesta kärjestä.
(Yksinkertainen monikulmio on monikulmio, jossa ei ole reikää ja joka ei leikkaa itseään.)

Aika: 4 tuntia.
Jokainen tehtävä on 8 pisteen arvoinen.

7. Iranin geometriaolympialaiset

Keskitaso

30. lokakuuta 2020

Kilpailun tehtävät on pidettävä salassa kunnes ne on julkaistu IGO:n nettisivuilla: igo-official.ir

Tehtävä 1. Puolisuunnikkaan $ABCD$ sivut AB ja CD ovat yhdensuuntaiset. Olkoon M janan AB keskipiste. Piste N sijaitsee janalla CD siten, että $\angle ADN = \frac{1}{2}\angle MNC$ ja $\angle BCN = \frac{1}{2}\angle MND$. Osoita, että N on janan CD keskipiste.

Tehtävä 2. Olkoon ABC tasakylkinen kolmio ($AB = AC$), jonka ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on O. Piste N on janan BC keskipiste ja piste M on pisteen N peilaus sivun AC suhteen. Olkoon T sellainen piste, että $ANBT$ on suorakulmio. Osoita, että $\angle OMT = \frac{1}{2}\angle BAC$.

Tehtävä 3. Piste H on teräväkulmaisen kolmion ABC ($AC > AB$) korkeusjanojen leikkauspiste ja piste M on janan BC keskipiste. Mediaani AM leikkaa kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän pisteessä X. Suora CH leikkaa BC:n keskinormaalin pisteessä E ja kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän uudelleen pisteessä F. Piste J sijaitsee ympyrällä ω, joka kulkee pisteiden X, E ja F kautta siten, että $BCHJ$ on puolisuunnikas ($CB \parallel HJ$). Osoita, että JB ja EM leikkaavat ympyrällä ω.

Tehtävä 4. On annettu kolmio ABC. Mielivaltainen ympyrä, jonka keskipiste on J ja joka kulkee pisteiden B ja C kautta, leikkaa sivun AC pisteessä E ja sivun AB pisteessä F. Olkoon X sellainen piste, että kolmio FXB on yhdenmuotoinen kolmion EJC kanssa (pisteet samassa järjestyksessä) ja pisteet X ja C sijaitsevat samalla puolella suoraa AB. Vastaavasti olkoon Y sellainen piste, että kolmio EYC on yhdenmuotoinen kolmion FJB kanssa (pisteet samassa järjestyksessä) ja pisteet Y ja B sijaitsevat samalla puolella suoraa AC. Osoita, että suora XY kulkee kolmion ABC korkeusjanojen muodostaman leikkauspisteen kautta.

Tehtävä 5. Etsi kaikki luvut $n \geq 4$, joille on olemassa konveksi monitahokas, jossa on tasan n tahkoa ja jonka kaikki tahkot ovat suorakulmaisia kolmioita.
(Huomaa, että minkä tahansa kahden vierekkäisen tahkon välinen kulma konveksissa monitahokkaassa on pienempi kuin $180°$.)

Aika: 4 tuntia ja 30 minuuttia.
Jokainen tehtävä on 8 pisteen arvoinen.

7. Iranin geometriaolympialaiset

Vaativa taso

30. lokakuuta 2020

Kilpailun tehtävät on pidettävä salassa kunnes ne on julkaistu IGO:n nettisivuilla: igo-official.ir

Tehtävä 1. Olkoot M, N ja P kolmion ABC sivujen BC, AC ja AB keskipisteet (tässä järjestyksessä). E ja F ovat kaksi sellaista pistettä janalla BC, että $\angle NEC = \frac{1}{2}\angle AMB$ ja $\angle PFB = \frac{1}{2}\angle AMC$. Osoita, että $AE = AF$.

Tehtävä 2. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, jonka sisään piirretyn ympyrän keskipiste on I. Olkoon N kaaren BAC keskipiste kolmion ABC ympäri piirretyllä ympyrällä ja P sellainen piste, että $ABPC$ on suunnikas. Olkoon Q pisteen A peilaus pisteen N yli ja R pisteen A projektio QI:lla. Osoita, että suora AI on kolmion PQR ympäri piirretyn ympyrän tangentti.

Tehtävä 3. Kolmella ympyrällä ei ole yhteisiä pisteitä, ne eivät ole toistensa sisällä ja niille pätee, että jokainen suora, joka erottaa kaksi ympyrää toisistaan, leikkaa kolmannen ympyrän sisäosan kanssa. Osoita, että ympyröiden keskipisteiden etäisyyksien summa on korkeintaan $2\sqrt{2}$ kertaa niiden säteiden pituuksien summa.
(Suora erottaa kaksi ympyrää silloin, kun ympyrät eivät leikkaa suoraa ja ovat sen eri puolilla.)

Huomautus. Heikommasta tuloksesta, jossa $2\sqrt{2}$ on korvattu jollakin toisella luvulla c, voidaan antaa pisteitä riippuen luvun $c > 2\sqrt{2}$ arvosta.

Tehtävä 4. Ympyrän, jonka keskipiste on I, ympärille on piirretty konveksi nelikulmio $ABCD$ siten, että sivut AD, DC, CB ja BA sivuavat kyseistä ympyrää pisteissä K, L, M ja N. Suorat AD ja BC leikkaavat pisteessä E ja suorat AB ja CD leikkaavat pisteessä F. Suora KM leikkaa AB:n pisteessä X ja CD:n pisteessä Y. Suora LN leikkaa AD:n pisteessä Z ja BC:n pisteessä T. Osoita, että kolmion XFY ympäri piirretty ymprä ja ympyrä, jonka halkaisija on EI sivuavat toisiaan jos ja vain jos kolmion TEZ ympäri piirretty ympyrä ja ympyrä, jonka halkaisija on FI sivuavat toisiaan.

Tehtävä 5. Tarkastellaan teräväkulmaista kolmiota ABC $(AC > AB)$, jonka korkeusjanojen leikkauspiste on H ja ympäri piirretty ympyrä Γ. Piste M on janan BC keskipiste ja piste P on janan AH keskipiste. Suora AM leikkaa ympyrän Γ uudelleen pisteessä X ja piste N sijaitsee suoralla BC siten, että NX on ympyrän Γ tangentti. Pisteet J ja K sijaitsevat ympyrällä, jonka halkaisija on MP siten, että $\angle AJP = \angle HNM$ (B ja J sijaitsevat samalla puolella suoraa AH) ja ympyrä ω_1, joka kulkee pisteiden K, H, ja J kautta, ja ympyrä ω_2, joka kulkee pisteiden K, M ja N kautta, sivuavat toisiaan siten, että kumpikaan ympyrä ei ole toisen ympyrän sisällä. Osoita, että ympyröiden ω_1 ja ω_2 yhteiset ulkoiset tangentit (yhteiset tangentit, jotka eivät leikkaa ympyröiden keskipisteitä yhdistävää janaa) kohtaavat suoralla NH.

Aika: 4 tuntia ja 30 minuuttia.
Jokainen tehtävä on 8 pisteen arvoinen.