

## 45. Kansainväliset Matematiikkaolympialaiset

Ensimmäinen päivä

Maanantai, 12. heinäkuuta 2004

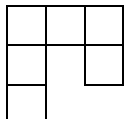
**Tehtävä 1.** Olkoon  $ABC$  teräväkulmainen kolmio ja  $AB \neq AC$ . Ympyrä, jonka halkaisija on  $BC$ , leikkaa sivun  $AB$  pisteessä  $M$  ja sivun  $AC$  pisteessä  $N$ . Olkoon  $O$  sivun  $BC$  keskipiste. Kulmien  $BAC$  ja  $MON$  puolittajat leikkaavat toisensa pisteessä  $R$ . Todista, että kolmioiden  $BMR$  ja  $CNR$  ympäri piirretyllä ympyröillä on yhteinen piste, joka on sivulla  $BC$ .

**Tehtävä 2.** Määritä kaikki reaalikertoimiset polynomit  $P(x)$ , jotka toteuttavat yhtälön

$$P(a - b) + P(b - c) + P(c - a) = 2P(a + b + c)$$

kaikilla ehdon  $ab + bc + ca = 0$  toteuttavilla reaaliluvuilla  $a$ ,  $b$  ja  $c$ .

**Tehtävä 3.** Olkoon *koukku* oheisen kuvion mukaisesti kuudesta yksikköneliöstä muodostuva kuvio:



tai mikä hyvänsä tästä kuvioista kierroilla tai peilauksilla muodostuva kuvio.

Määritä kaikki  $m \times n$ -suorakaiteet, jotka voidaan peittää koukuilla niin, että

- suorakaide peittyy aukottomasti eivätkä koukut peitä toisiaan;
- mikään koukku ei peitä suorakaiteen ulkopuolista aluetta.

Kokeen kesto aika 4 tuntia 30 minuuttia.

Jokaisen tehtävän enimmäispistemäärä on 7.