

45. Kansainväliset Matematiikkaolympialaiset

Ensimmäinen päivä

Maanantai, 12. heinäkuuta 2004

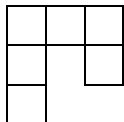
Tehtävä 1. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio ja $AB \neq AC$. Ympyrä, jonka halkaisija on BC , leikkaa sivun AB pisteessä M ja sivun AC pisteessä N . Olkoon O sivun BC keskipiste. Kulmien BAC ja MON puolittajat leikkaavat toisensa pisteessä R . Todista, että kolmioiden BMR ja CNR ympäri piirretyllä ympyröllä on yhteinen piste, joka on sivulla BC .

Tehtävä 2. Määritä kaikki reaalikertoimiset polynomit $P(x)$, jotka toteuttavat yhtälön

$$P(a - b) + P(b - c) + P(c - a) = 2P(a + b + c)$$

kaikilla ehdon $ab + bc + ca = 0$ toteuttavilla reaaliluvuilla a , b ja c .

Tehtävä 3. Olkoon *koukku* oheisen kuvion mukaisesti kuudesta yksikköneliöstä muodostuva kuvio:



tai mikä hyvänsä tästä kuvioista kierroilla tai peilauksilla muodostuva kuvio.

Määritä kaikki $m \times n$ -suorakaiteet, jotka voidaan peittää koukuilla niin, että

- suorakaide peittyy aukottomasti eivätkä koukut peitä toisiaan;
- mikään koukku ei peitä suorakaiteen ulkopuolista aluetta.

Kokeen kesto aika 4 tuntia 30 minuuttia.

Jokaisen tehtävän enimmäispistemäärä on 7.

45. Kansainväliset Matematiikkaolympialaiset

Toinen päivä

Tiistai, 13. heinäkuuta 2004

Tehtävä 4. Olkoon $n \geq 3$ kokonaisluku ja olkoot t_1, t_2, \dots, t_n positiivisia reaalilukuja, joille on voimassa

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \dots + t_n) \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n} \right).$$

Osoita, että t_i, t_j, t_k ovat kaikilla $i, j, k, 1 \leq i < j < k \leq n$, kolmion sivujen pituuksia.

Tehtävä 5. Kuperan nelikulmion $ABCD$ lävistäjä BD ei ole kulman ABC eikä kulman CDA puolittaja. Piste P on nelikulmion $ABCD$ sisällä ja toteuttaa ehdot

$$\angle PBC = \angle DBA \quad \text{ja} \quad \angle PDC = \angle BDA.$$

Todista, että $ABCD$ on jänne­nelikulmio, jos ja vain jos $AP = CP$.

Tehtävä 6. Positiivista kokonaislukua kutsutaan *vuorottelevaksi*, jos sen kymmenjärjestelmäesityksessä jokaisesta kahdesta peräkkäisestä numerosta toinen on parillinen ja toinen pariton.

Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut, joilla on vuorotteleva monikerta.

Kokeen kesto­aika 4 tuntia 30 minuuttia.

Jokaisen tehtävän enimmäispistemäärä on 7.