Version: Finnish

Ensimmäinen päivä, 25. heinäkuuta 2007

1. tehtävä. On annettu reaaliluvut $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Jokaiselle i, $1 \leq i \leq n$, määritellään

$$d_i = \max\{a_j \mid 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j \mid i \leq j \leq n\}.$$

Olkoon

$$d = \max\{d_i \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) Osoita, että mielivaltaisille reaaliluvuille $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ pätee

$$\max\{|x_i - a_i| \mid 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \qquad (*)$$

(b) Osoita, että on olemassa reaaliluvut $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$, joille epäyhtälössä $(*)$ vallitsee yhtäsuuruus.

2. tehtävä. Pisteet A, B, C, D ja E sijaitsevat niin, että $ABCD$ on suunnikas ja $BCED$ on jännenelikulmio. Suora ℓ kulkee pisteen A kautta. Oletetaan, että ℓ leikkaa janan DC sen sisäpisteessä F ja suoran BC pisteessä G. Oletetaan, että $EF = EG = EC$. Todista, että ℓ on kulman DAB puolittaja.

3. tehtävä. Matematiikkakilpailun osallistujista jotkut ovat toistensa ystäviä; ystävyys on aina molemminpuolista. Sanomme, että jokin kilpailijoiden joukko on *klikki*, jos kaikki sen jäsenet ovat toistensa ystäviä. (Erityisesti joukot, joissa on vähemmän kuin kaksi alkiota ovat klikkejä.) Sanomme klikin jäsenten lukumäärää klikin *kooksi.*

Tiedetään, että tässä kilpailussa klikkien suurin koko on parillinen. Todista, että kilpailijat voidaan jakaa kahteen huoneeseen niin, että suurikokoisin toisessa huoneessa oleva klikki on samankokoinen kuin suurikokoisin toisessa huoneessa oleva klikki.

Työaikaa $4\frac{1}{2}$ tuntia.
Jokaisen tehtävän maksimipistemäärä on 7.