

IMO-harjoituskoe, Sorø, 14.7.2011

Ratkaisuja

Tehtävä 1. Olkoot x_1, \dots, x_{100} ei-negatiivisia reaalitykkuja, joille on voimassa $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \leq 1$ kaikilla $i = 1, \dots, 100$ (kun $x_{101} = x_1$ ja $x_{102} = x_2$). Määritä summan

$$S = \sum_{i=1}^{100} x_i x_{i+2}$$

suurin mahdollinen arvo.

Ratkaisu. Jos valitaan joka toiseksi luvuksi 0 ja joka toiseksi luvuksi $\frac{1}{2}$, saadaan $S = 50 \cdot \frac{1}{4} = \frac{25}{4}$. Osoitetaan, että S ei voi saada suurempaa arvoa. Tätä varten arvioidaan summan kahta peräkkäistä termiä ja otetaan huomioon luvuille asetettu suuruusehto. Kun käytetään aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välistä epäyhtälöä, saadaan

$$\begin{aligned} x_{2i-1}x_{2i+1} + x_{2i}x_{2i+2} &\leq (1 - x_{2i} - x_{2i+1})x_{2i+1} + x_{2i}(1 - x_{2i} - x_{2i+1}) \\ &= (x_{2i} + x_{2i+1})(1 - x_{2i} - x_{2i+1}) \leq \frac{((x_{2i} + x_{2i+1}) + (1 - x_{2i} - x_{2i+1}))^2}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Summassa S on 50 yllä olevan epäyhtälöketjun vasemmassa päässä esiintyvää termiä, joten summan arvo on enintään $\frac{50}{4} = \frac{25}{4}$.

Tehtävä 2. Olkoon $A_1A_2 \dots A_n$ kupera monikulmio. Valitaan piste P monikulmion sisältä niin, että sen projektiot P_1, \dots, P_n suorilla A_1A_2, \dots, A_nA_1 (tässä järjestyksessä) ovat monikulmion sivuilla. Todista, että jos sivuilta A_1A_2, \dots, A_nA_1 valitaan mielivaltaiset pisteet X_1, \dots, X_n (tässä järjestyksessä), niin

$$\max \left\{ \frac{|X_1X_2|}{|P_1P_2|}, \dots, \frac{|X_nX_1|}{|P_nP_1|} \right\} \geq 1.$$

Ratkaisu. Merkitään $P_{n+1} = P_1$, $A_{n+1} = A_1$ ja $X_{n+1} = X_1$. Todistetaan ensin apululos: Piste P on jonkin kolmion $X_iA_{i+1}X_{i+1}$ ympäri piirretyn ympyrän sisällä tai kehällä. Tämä seuraa siitä, että kulmien $\angle X_iA_{i+1}X_{i+1}$ summa on $(n-2) \cdot 180^\circ$ ja kulmien $\angle X_iPX_{i+1}$ summa on 360° . Kaikkien nelikulmioiden $X_iA_{i+1}X_{i+1}P$ vastakkaisen kulmien $\angle X_iA_{i+1}X_{i+1}$ ja $\angle X_iPX_{i+1}$ summa on siis $n \cdot 180^\circ$. Ainakin yhdellä nelikulmiolla $X_iA_{i+1}X_{i+1}P$ tämä summa on $\geq 180^\circ$. Piste P on tämän silloin kolmion $X_iA_{i+1}X_{i+1}$ ympäri piirretyn ympyrän sisällä tai kehällä. Olkoot nyt γ ja Γ kolmioiden $P_iA_{i+1}P_{i+1}$ ja $X_iA_{i+1}X_{i+1}$ ympäri piirretyt ympyrät ja r ja R näiden ympyröiden säteet. Koska $\angle A_{i+1}P_iP$ on suora, $A_{i+1}P$ on ympyrän γ halkaisija ja $2r = A_{i+1}P$. Koska P on ympyrän Γ sisällä tai kehällä, $2R \geq A_{i+1}P$. Sovelletaan laajennettua sinilauseetta kolmioihin $P_iA_{i+1}P_{i+1}$ ja $X_iA_{i+1}X_{i+1}$. Saadaan

$$P_iP_{i+1} = 2r \sin(\angle P_iA_{i+1}P_{i+1}) \leq 2R \sin(\angle X_iA_{i+1}X_{i+1}) = X_iX_{i+1},$$

ja väite seuraa.

Tehtävä 3. Olkoon k positiivinen kokonaisluku ja olkoot $b > w > 1$ kaksi muuta kokonaislukua. On kaksi helminauhaa. Toisessa on w valkoista helmeä ja toisessa b mustaa helmeä. Sanome, että helminauhan pituus on siinä olevien helmien lukumäärä. Nauhoja leikataan vaihteittain seuraavien sääntöjen mukaan:

- (i) Nauhanpätkät asetetaan pituusjärjestykseen. Jos pätkissä on yhtä pitkiä, valkoiset pätkät edeltävät mustia pätkiä. Valitaan k pisintä pätkää, jos näin monessa pätkässä on vähintään kaksi helmeä. Jos tällaisia pätkiä on vähemmän kuin k kappaletta, ne valitaan kaikki.
- (ii) Kaikki valitut pätkät leikataan osiksi, joiden pituus eroaa enintään yhdellä. (Jos esimerkiksi on neljä mustaa pätkää, joiden pituudet ovat 5, 4, 4 ja 2 ja kolme valkoista pätkää, joiden pituudet ovat 8, 4 ja 3, ja jos $k = 4$, niin ne pätkät joissa on 8 valkoista helmeä, 5 mustaa helmeä, 4 valkoista helmeä ja neljä mustaa helmeä leikataan osiksi $(4, 4)$, $(3, 2)$, $(2, 2)$ ja $(2, 2)$.)

Prosessi päättyy, kun syntyy ensimmäinen yhden valkoisen helmen muodostama pätkä. Todista, että tuolloin on vielä ainakin yksi ketju, joka muodostuu ainakin kahdesta mustasta helmestä.

Ratkaisu. Merkitään jakotilannetta i :nneen jaon jälkeen symbolilla A_i . Alkutilanne on siis A_0 ja jakotapahtumia ovat $A_i \rightarrow A_{i+1}$. Nauhanpätkää, jossa on m helmeä, kutsutaan m -ketjuksi. Ajatellaan prosessia jatkettavan, kunnes jäljellä on vain 1-ketjuja. Olkoon A_s se tilanne, jossa ensimmäisen kerran ilmaantuu jokin 1-ketju (valkoinen tai musta), A_t se tilanne, jolloin nauhoja on ensi kerran enemmän kuin k kappaletta. (Ellei tällaista tilannetta ole, merkitään $t = \infty$) ja olkoon A_f se tilanne, jolloin kaikki mustat helmet ovat eri ketjuissa. Todistettava väite on nyt, että tilanteessa A_{f-1} on jokin valkea 1-ketju.

Selvästi $s \leq f$. Koska tilanteessa A_f on vain ketjuja, joissa on yksi musta helmi, tilanteessa A_{f-1} kussakin ketjussa, jossa on mustia helmiä, on enintään kaksi mustaa helmeä.

Kun $i \leq t - 1$, niin jaossa $A_i \rightarrow A_{i+1}$ kaikki ketjut, joissa on enemmän kuin yksi helmi, katkaistaan, ja jos $i < s$, niin kaikki ketjut katkaistaan. Olkoot nyt B_i ja b_i vaiheessa A_i pisimmän ja lyhimmän mustan ketjun pituudet ja W_i, w_i vastaavat valkean ketjun pituudet. Osoitetaan induktiolla, että jos $i \leq \min\{s, t\}$, niin tilanteessa A_i mustia ja valkoisia ketjuja on kumpiakin 2^i kappaletta ja $B_i \geq W_i, b_i \geq w_i$. Väite on tosi, kun $i = 0$. Ketjujen lukumäärää koskeva väite on ilmeinen seuraus induktio-oletuksesta ja siitä, että kaikki ketjut katkaistaan. Pituuksia koskevat väitteet seuraavat induktio-oletuksesta ja katkaisun pituussäännöstä: $B_i = \lceil B_{i-1}/2 \rceil \geq \lceil W_{i-1}/2 \rceil, b_i = \lfloor b_{i-1}/2 \rfloor \geq \lfloor w_{i-1}/2 \rfloor = w_i$.

Käsitellään erikseen tapaus 1, jossa $s \leq t$ tai $f \leq t + 1$ ja tapaus 2, jossa $t + 1 \leq s$ ja $t + 2 \leq f$. Edellinen tapaus on erityisesti kyseessä silloin, kun $t = \infty$. Tapauksessa 1 on tilanteessa A_{s-1} $B_{s-1} \geq W_{s-1}, b_{s-1} \geq w_{s-1} > 1$, koska $s - 1 \leq \min\{s, t\}$. Jos olisi $s = f$, niin tilanteessa A_{s-1} ei olisi yhtään valkeaa 1-ketjua eikä yhtään mustaa c -ketjua, missä $c > 2$. Siis $2 = B_{s-1} \geq W_{s-1} \geq b_{s-1} \geq w_{s-1} > 1$. Kaikki edellisen epäyhtälöketjun luvut ovat siis kakkosia. Tilanteessa A_{s-1} kaikkien ketjujen pituus olisi 2, mistä seuraisi $b = 2 \cdot 2^{s-1} = w$. Tämä on vastoin oletusta. Siis $s \leq f - 1$ ja $s \leq t$. Siten s :nnessä askeleessa jokainen ketju jaetaan. Jos tässä askeleessa ilmaantuisi musta 1-ketju, niin epäyhtälön $w_{s-1} \leq b_{s-1}$ perusteella ilmaantuisi myös valkea 1-ketju, mutta kaikki mustat ketjut eivät vielä olisi 1-ketjuja, joten väite pitää paikkansa.

Käsitellään vielä tapaus 2, jossa $t + 1 \leq s$ ja $t + 2 \leq f$. Tilanteessa A_t on tasan 2^t valkoista ja 2^t mustaa ketjua, kaikkien pituus on enemmän kuin 1, ja $2^{t+1} > k \geq 2^t$ (koska tilanteessa A_t on kaikkiaan 2^t ketjua). Askeleessa $t + 1$ katkaistaan tasan k ketjua, ja niistä enintään 2^t on mustia, joten tilanteessa A_{t+1} valkoisia ketjuja on ainakin $2^t + (k - 2^t) = k$ kappaletta. Koska valkeiden ketjujen määrä ei voi vähentyä, tilanteessa A_{f-1} valkeita ketjuja on ainakin k kappaletta. Tilanteessa A_{f-1} mustien ketjujen pituus on enintään 2, ja ainakin yksi musta 2-ketju katkaistaan f :nessä askeleessa. Täten tuossa askeleessa katkaistaan enintään $k - 1$ valkoista ketjua, joten on ainakin yksi valkea ketju W , jota ei katkaista. Koska askeleessa f katkaistaan musta 2-ketju, siinä katkaistaan kaikki ainakin kahden pituiset valkeat ketjut. Se valkea ketju, jota ei katkaista on silloin välttämättä 1-ketju. Tämä todistaa väitteen.