52. Kansainväliset matematiikkaolympialaiset

1. päivä, 18. heinäkuuta 2011

Tehtävä 1. Olkoon $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ joukko, jonka alkioina on neljä eri suurta positiivista kokonaislukua. Joukon alkioiden summaa $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ merkitään S_A:lla. Olkoon n_A niiden parien (i, j) lukumäärä, joille $1 \leq i < j \leq 4$ ja $a_i + a_j$ on S_A:n tekijä. Määritä kaikki sellaiset neljän eri suuren kokonaisluvun joukot A, joille n_A on mahdollisimman suuri.

Tehtävä 2. Tason äärellisessä joukossa $\mathcal{S}$ on ainakin kaksi pistettä jä mitkään kolme $\mathcal{S}$:n pistettä eivät ole samalla suoralla. Seuraavaa prosessia kutsutaan *tuulimyllyksi*. Alkutilanteessa suora ℓ kulkee joukkoon yhden joukon $\mathcal{S}$ pisteen P kautta. Se kiertyy myötäpäivään *kierron keskipisteen* P ympäri, kunnes se kohtaa jonkin toisen joukkoon $\mathcal{S}$ kuuluvan pisteen Q. Pisteestä Q tulee nyt kierron koskipiste, ja suora kiertyy Q:n ympäri myötäpäivään, kunnes se jäleen kohtaa jonkin $CalS$:n pisteen. Prosessi jatkuu loputtomasti.

Osoita, että on mahdollista valita $P \in \mathcal{S}$ ja P:n kautta kulkeva suora ℓ niin, että näistä aloitettu tuulimylly käyttää jokaista $\mathcal{S}$:n pistettä kierron keskipisteenä äärettömän monta kertaa.

Tehtävä 3. Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ toteuttaa ehdon

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

kaikilla reaaliluvuilla x ja y. Osoita, että $f(x) = 0$ kaikilla $x \leq 0$.

Toinen päivä, 19. heinäkuuta 2011

Tehtävä 4. Olkoon $n > 0$ kokonaisluku. Käytössä on kaksivartinen vaaka ja n punnusta, joiden massat ovat $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Punnukset on asetettava yksitellen vaa'alle niin, että oikea vaakakuppi ei koskaan paina enempää kuin vasen vaakakuppi. Joka vaiheessa valitaan yksi jäljellä olevista punnuksista ja se asetetaan joko vasempaan tai oikeaan vaakakuppiin, kunnes kaikki punnukset ovat vaa'alla.

Määritä, kuinka monella eri tavalla tämä voidaan tehdä.

Tehtävä 5. Funktio f on määritelty kokonaislukujen joukossa ja sen arvot ovat positiivisia kokonaislukuja. Oletetaan, että jokaisella kahdella kokonaisluvulla m ja n erotus $f(m) - f(n)$ on jaollinen luvulla $f(m - n)$. Osoita, että kaikilla sellaisilla kokonaisluvuilla m ja n, joilla $f(m) \leq f(n)$, $f(n)$ on jaollinen luvulla $f(m)$.

Tehtävä 6. Teräväkulmaisen kolmion ABC ympäri piirretty ympyrä on Γ. Suora ℓ on ympyrän Γ tangentti ja suorat ℓ_a, ℓ_b ja ℓ_c ovat suoran ℓ kuvat peilauksissa yli suorien BC, CA ja AB, tässä järjestyksessä. Osoita, että suorien ℓ_a, ℓ_b ja ℓ_c määrittelemän kolmion ympäri piirretty ympyrä sivuaa ympyrää Γ.