Tiistai 8. heinäkuuta 2014

Tehtävä 1. Olkoon $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ päättymätön jono positiivisia kokonaislukuja. Todista, että on olemassa yksi ja vain yksi kokonaisluku $n \geq 1$, jolle pätee

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Tehtävä 2. Olkoon $n \geq 2$ kokonaisluku. Tarkastellaan $n \times n$ -šakkilautaa, jonka n^2 yksikköneliötä muodostavat. Kutsutaan n:n laudalla olevan tornin asetelmaa *rauhalliseksi*, jos laudan jokaisella vaaka- ja pystyrivillä on tasan yksi torni. Määritä suurin sellainen positiivinen kokonaisluku k, jolle jokaista rauhallista n:n tornin asetelmaa kohden on olemassa $k \times k$ -neliö, jonka yhdessäkään sen k^2:sta yksikköneliöstä ei ole tornia.

Tehtävä 3. Kuperassa nelikulmiossa $ABCD$ on $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. Piste H on pisteen A kohtisuora projektio suoralla BD. Piste S on sivulla AB ja piste T on sivulla AD niin, että H on kolmion SCT sisällä ja

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°, \quad \angle THC - \angle DTC = 90°\,.$$

Todista, että suora BD on kolmion TSH ympäri piirretyn ympyrän tangentti.

Tehtävä 4. Pisteet P ja Q ovat teräväkulmaisen kolmion ABC sivulla BC niin, että $\angle PAB = \angle BCA$ ja $\angle CAQ = \angle ABC$. Piste M on suoralla AP ja piste N on suoralla AQ niin, että P on janan AM keskipiste ja Q on janan AN keskipiste. Todista, että suorien BM ja CN leikkauspiste on kolmion ABC ympäri piirretyllä ympyrällä.

Tehtävä 5. Kapkaupungin Pankki laskee liikkeelle kolikkoja, joiden arvo on $\frac{1}{n}$, kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n. Tarkastellaan äärellistä kokoelmaa tällaisia kolikkoja (joiden ei tarvitse olla keskenään eriarvoisia), jonka yhteisarvoarvo on enintään $99 + \frac{1}{2}$. Todista, että kokoelma voidaan jakaa sataan tai vähempään osaan, joista jokaisen arvo on enintään 1.

Tehtävä 6. Joukko tason suoria on *yleisessä asemassa*, jos mitkään kaksi eivät ole yhdensuuntaisia eivätkä mitkään kolme kulje saman pisteen kautta. Yleisessä asemassa oleva suorajoukko leikkaa tason alueiksi, joista jotkin ovat pinta-alaltaan äärellisiä; kutsutaan näitä joukon *äärellisiksi alueiksi*. Todista, että kaikilla riittävän suurilla n:n arvoilla on mahdollista värittää jokaisesta yleisessä asemassa olevassa n:n suoran joukosta ainakin $\sqrt{n}$ suoraa sinisiksi niin, että suorajoukon minkään äärellisen alueen reuna ei ole kokonaan sininen.

Huomautus: Todistukset, joissa $\sqrt{n}$:n tilalla on $c\sqrt{n}$, saavat pisteitä sen mukaan, mikä on vakion c arvo.

Työaika: 4 tuntia 30 minuuttia.
Kunkin tehtävän enimmäispistemäärä on 7.