59th International Mathematical Olympiad
Cluj-Napoca Romania

Maanantai, 9. heinäkuuta, 2018

Tehtävä 1. Olkoon Γ teräväkulmaisen kolmion ABC ympäri piirretty ympyrä. Pisteet D ja E ovat vastaavasti sellaisia janojen AB ja AC pisteitä, että $AD = AE$. Janojen BD ja CE keskinormaalit leikkaavat ympyrän Γ lyhyemmät kaaret AB ja AC pisteissä F ja G vastaavasti. Osoita, että suorat DE ja FG ovat yhdensuuntaiset (tai ovat sama suora).

Tehtävä 2. Etsi kaikki kokonaisluvut $n \geq 3$, joita kohti on olemassa sellaiset reaaliluvut $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$, että $a_{n+1} = a_1$ ja $a_{n+2} = a_2$ ja

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n$.

Tehtävä 3. *Anti-Pascalin kolmio* on tasasivuinen kolmion muotoinen taulukko lukuja, missä alimmaista riviä lukuun ottamatta jokainen numero on kahden välittömästi sen alla olevan luvun erotuksen itseisarvo. Esimerkiksi seuraava taulukko on anti-Pascalin kolmio, jossa on neljä riviä ja joka sisältää jokaisen kokonaisluvun luvusta 1 lukuun 10.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Onko olemassa sellainen anti-Pascalin kolmio, jossa on 2018 riviä ja joka sisältää jokaisen kokonaisluvun luvusta 1 lukuun $1 + 2 + \cdots + 2018$?

Language: Finnish

Aikaa: 4 tuntia ja 30 minuuttia
Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen

Tiistai, 10. heinäkuuta, 2018

Tehtävä 4. *Tontti* on mikä tahansa tason piste (x, y), missä x ja y ovat molemmat positiivisia kokonaislukuja, jotka ovat pienempiä tai yhtä suuria kuin 20.

Aluksi kukin 400 tontista on vapaa. Amy ja Ben laittavat tonteilla vuorotellen kiviä ja Amy aloittaa. Omalla vuorollaan Amy laittaa uuden punaisen kiven sellaiselle vapaalle tontille, jonka etäisyys mistä tahansa varatusta tontista, missä on punainen kivi, ei ole $\sqrt{5}$. Omalla vuorollaan Ben laittaa uuden sinisen kiven vapaalle tontille. (Tontti, jossa on sininen kivi, voi olla millä tahansa etäisyydellä mistä tahansa muusta tontista.) Peli loppuu, kun jompikumpi pelaajista ei voi enää lisätä kiveä.

Etsi suurin K, jolla Amy voi varmasti laittaa ainakin K punaista kiveä riippumatta siitä, miten Ben laittaa siniset kivensä.

Tehtävä 5. Olkoon $a_1, a_2, \ldots$ päättymätön jono positiivisia kokonanaislukuja. Oletetaan, että on olemassa kokonaisluku $N > 1$, jolle jokaista $n \geq N$ kohti luku

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

on kokonaisluku. Osoita, että on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku M, että $a_m = a_{m+1}$ kaikilla $m \geq M$.

Tehtävä 6. Konveksilla nelikulmiolla $ABCD$ on voimassa $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Nelikulmion $ABCD$ sisällä on sellainen piste X, että

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{ja} \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

Osoita, että $\angle BXA + \angle DXC = 180°$.