maanantai, 11. heinäkuuta 2022

Tehtävä 1. Oslon pankki laskee liikkeelle kahdentyyppisiä kolikoita: alumiinikolikoita (merkitään niitä A:lla) ja pronssikolikoita (merkitään niitä B:llä). Mariannella on n alumiinikolikkoa ja n pronssikolikkoa järjestettynä riviin mielivaltaisessa alkujärjestyksessä. *Ketju* on mikä tahansa alijono, joka koostuu peräkkäisistä, samantyyppisistä kolikoista. Olkoon $k \leqslant 2n$ kiinnitetty positiivinen kokonaisluku. Marianne suorittaa toistuvasti seuraavan operaation: hän etsii pisimmän ketjun, joka sisältää k:nnen kolikon vasemmalta ja siirtää kaikki kolikot tässä ketjussa rivin vasemmanpuoleiseen päähän. Esimerkiksi jos $n = 4$ ja $k = 4$, niin prosessi, joka alkaa järjestyksestä $AABBBABA$, olisi

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

Etsi kaikki sellaiset parit (n, k), missä $1 \leqslant k \leqslant 2n$, joille mistä tahansa alkujärjestyksestä jossain prosessin vaiheessa päädytään tilanteeseen, jossa vasemmanpuoleisimmat n kolikkoa ovat samantyyppisiä.

Tehtävä 2. Olkoon $\mathbb{R}^+$ positiivisten reaalilukujen joukko. Etsi kaikki funktiot $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, joille jokaista $x \in \mathbb{R}^+$ kohti on olemassa täsmälleen yksi $y \in \mathbb{R}^+$, joka toteuttaa ehdon

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

Tehtävä 3. Olkoon k positiivinen kokonaisluku ja S äärellinen joukko parittomia alkulukuja. Todista, että on olemassa korkeintaan yksi tapa (lukuunottamatta kiertoa ja peilausta) sijoittaa joukon S alkiot ympyrälle siten, että minkä tahansa kahden vierekkäisen luvun tulo on muotoa $x^2 + x + k$ jollekin positiiviselle kokonaisluvulle x.

Aika: 4 tuntia ja 30 minuuttia.
Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen.

tiistai, 12. heinäkuuta 2022

Tehtävä 4. Olkoon $ABCDE$ konveksi viisikulmio, jolle $BC = DE$. Oletetaan, että viisikulmion $ABCDE$ sisällä on piste T, jolle $TB = TD$, $TC = TE$ ja $\angle ABT = \angle TEA$. Suora AB leikkaa suoran CD pisteessä P ja suoran CT pisteessä Q. Oletetaan, että pisteet P, B, A, Q sijaitsevat suorallaan tässä järjestyksessä. Suora AE leikkaa suoran CD pisteessä R ja suoran DT pisteessä S. Oletetaan, että pisteet R, E, A, S sijaitsevat suorallaan tässä järjestyksessä. Osoita, että pisteet P, S, Q, R sijaitsevat ympyrällä.

Tehtävä 5. Etsi kaikki sellaiset positiivisten kokonaislukujen kolmikot (a, b, p), joissa p on alkuluku ja

$$a^p = b! + p.$$

Tehtävä 6. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. *Pohjoismainen neliö* on $n \times n$-ruudukko, joka sisältää kaikki kokonaisluvut luvusta 1 lukuun n^2 siten, että jokainen ruutu sisältää tasan yhden luvun. Kaksi eri ruutua ovat naapureita, jos niillä on yhteinen sivu. Jokainen ruutu, jonka jokaisessa naapurissa sijaitsee sitä suurempi luku, on *laakso*. *Kiipeävä polku* on yhdestä tai useammasta ruudusta koostuva sarja ruutuja, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

(i) Sarjan ensimmäinen ruutu on laakso,

(ii) jokainen sarjassa seuraavana esiintyvä ruutu on edellisen ruudun naapuri, ja

(iii) luvut sarjan ruuduissa ovat kasvavassa järjestyksessä.

Etsi pienin mahdollinen kokonaislukumäärä kiipeäviä polkuja Pohjoismaisessa neliössä luvun n funktiona.

Language: Finnish

Aika: 4 tuntia ja 30 minuuttia.
Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen.