

tiistai, 16. heinäkuuta 2024

Tehtävä 1. Määritä kaikki sellaiset reaaliluvut α , että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n kokonaisluku

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

on jaollinen luvulla n . (Huomioi, että $\lfloor z \rfloor$ merkitsee suurinta kokonaislukua, joka on pienempi tai yhtäsuuri kuin z . Esimerkiksi $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ ja $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2,9 \rfloor = 2$.)

Tehtävä 2. Määritä kaikki positiivisten kokonaislukujen parit (a, b) , joilla on olemassa sellaiset positiiviset kokonaisluvut g ja N , että yhtälö

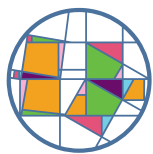
$$\text{syt}(a^n + b, b^n + a) = g$$

pätee kaikilla kokonaisluvuilla $n \geq N$. (Huomaa, että $\text{syt}(x, y)$ tarkoittaa lukujen x ja y suurinta yhteistä tekijää.)

Tehtävä 3. Olkoon a_1, a_2, a_3, \dots ääretön positiivisten kokonaislukujen jono ja olkoon N positiivinen kokonaisluku. Oletetaan, että kaikilla $n > N$ arvo a_n on yhtä suuri kuin se lukumäärä, miten monta kertaa a_{n-1} on jonossa a_1, a_2, \dots, a_{n-1} .

Osoita, että ainakin toinen jonoista a_1, a_3, a_5, \dots ja a_2, a_4, a_6, \dots on lopulta jaksollinen.

(Ääretön jono b_1, b_2, b_3, \dots on *lopulta jaksollinen*, jos on olemassa sellaiset positiiviset kokonaisluvut p ja M , että $b_{m+p} = b_m$ kaikilla $m \geq M$.)



keskiviikko, 17. heinäkuuta 2024

Tehtävä 4. Olkoon ABC kolmio, jossa $AB < AC < BC$. Olkoon kolmion ABC sisäänpiirretty ympyrä ω ja sen keskipiste I . Olkoon X pisteestä C poikkeava piste suoralla BC niin, että pisteen X kautta kulkeva suoran AC suuntainen suora sivuaa ympyrää ω . Vastaavasti olkoon Y pisteestä B poikkeava piste suoralla BC niin, että pisteen Y kautta kulkeva suoran AB suuntainen suora sivuaa ympyrää ω . Leikatkaa suora AI kolmion ABC ympäröivän ympyrän uudestaan pisteessä $P \neq A$. Olkoot K ja L janojen AC ja AB keskipisteet tässä järjestyksessä.

Osoita, että $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$.

Tehtävä 5. Turbo-etana pelaa peliä laudalla, jolla on 2024 riviä ja 2023 saraketta. Laudan 2022 ruudussa piileskelee hirviö. Aluksi Turbo ei tiedä, missä hirviöt ovat, mutta hän tietää, että kaikilla riveillä paitsi ensimmäisellä ja viimeisellä on täsmälleen yksi hirviö ja kussakin sarakkeessa on korkeintaan yksi hirviö.

Turbo yrittää toistuvasti päästä ensimmäiseltä riviltä viimeiselle riville. Jokaisella yrityksellä hän valitsee ensimmäiseltä riviltä aloitusruudun ja siirtyä aina ruudusta viereiseen ruutuun, eli sellaiseen ruutuun, jolla on yhteinen sivu. (Hän saa siirtyä myös sellaiseen ruutuun, jossa hän on jo käynyt.) Jos hän joutuu ruutuun, jossa on hirviö, niin yritys päättyy, ja Turbo siirretään takaisin lähtöriville seuraavaa yritystä varten. Hirviöt eivät siirry ja Turbo muistaa kaikista käymistään ruuduista, onko niissä hirviö. Jos hän pääsee viimeiselle riville, yritys loppuu ja peli päättyy.

Määritä pienin mahdollinen luvun n arvo niin, että Turbolla on strategia, joka varmistaa, että hän saavuttaa viimeisen rivin viimeistään n . yrityksellä riippumatta siitä, missä hirviöt ovat.

Tehtävä 6. Olkoon \mathbb{Q} rationaalilukujen joukko. Funktiota $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ kutsutaan *englantilaiseksi*, jos se toteuttaa seuraavan ehdon: kaikilla $x, y \in \mathbb{Q}$ pätee

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \quad \text{tai} \quad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Osoita, että on olemassa sellainen kokonaisluku c , että jokaisella englantilaisella funktiolla f on korkeintaan c eri rationaalilukua, jotka ovat muotoa $f(r) + f(-r)$ jollain rationaaliluvulla r ja määritä luvun c pienin mahdollinen arvo.