Kansainvälisten matematiikkaolympialaisten tehtävät 1975 – 1994

17. IMO, Burgas, 1975

75.1. Olkoot x_i, y_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) reaalilukuja, joille pätee $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$ ja $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n$. Todista, että jos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ on lukujen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ mielivaltainen permutaatio, niin

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2.$$

75.2. Olkoon $a_1, a_2, a_3, \ldots,$ mielivaltainen jono positiivisia kokonaislukuja, joille pätee $a_k < a_{k+1}$, kun $k \geq 1$. Todista, että äärettömän moni luvuista a_m voidaan esittää muodossa

$$a_m = xa_p + ya_q,$$

missä x ja y ovat positiivisia kokonaislukuja ja $p \neq q$.

75.3. Mielivaltaisen kolmion ABC ulkopuolelle piirretään (kolmion tasossa) kolmiot ABR, BCP ja CAQ siten, että $\angle PBC = \angle CAQ = 45°$, $\angle BCP = \angle QCA = 30°$ ja $\angle ABR = \angle RAB = 15°$. Osoita, että $\angle QRP = 90°$ ja että $|QR| = |RP|$.

75.4. Kun luku 4444^{4444} kirjoitetaan kymmenjärjestelmässä, sen numeroiden summa on A. Olkoon B luvun A numeroiden summa. Määritä luvun B numeroiden summa.

75.5. Tutki, voidaanko 1-säteisen ympyrän kehältä löytää 1975 pistettä siten, että kaikkien keskinäiset etäisyydet ovat rationaalisia.

75.6. Määritä kaikki kahden muuttujan polynomit, joilla on seuraavat ominaisuudet:

(1) Kaikilla reaalisilla t:n, x:n ja y:n arvoilla pätee

$$P(tx, ty) = t^n P(x, y).$$

(2) Kaikilla reaalisilla a:n, b:n ja c:n arvoilla on voimassa

$$P(a + b, c) + P(b + c, a) + P(c + a, b) = 0.$$

(3) $P(1, 0) = 1$.

18. IMO, Lienz, 1976

76.1. Kuperan nelikulmion ala on 32 cm^2 ja sen lävistäjän ja kahden vastakkaisen sivun pituuksien summa on 16 cm. Määritä toisen lävistäjän kaikki mahdolliset pituudet.

76.2. Olkoon $P_1(x) = x^2 - 2$ ja $P_j(x) = P_1(P_{j-1}(x))$, $j = 2, 3, \ldots$. Osoita, että jokaisella positiivisella kokonaisluvulla n yhtälön $P_n(x) = x$ kaikki juuret ovat reaalisia ja toisistaan eroavia.

76.3. Suorakulmainen laatikko voidaan kokonaan täyttää yksikkökuutioilla. Jos laatikkoon asetetaan mahdollisimman monta sellaista kuutiota, jonka tilavuus on 2 siten, että kuutioiden särmät ovat laatikon särmien suuntaiset, voidaan täyttää tasan 40 % laatikon tilavuudesta. Määritä kaikkien tällaisten laatikoiden (sisä)mitat. ($\sqrt[3]{2} = 1{,}2599\ldots$.)

76.4. Määritä suurin luku, joka on sellaisten positiivisten kokonaislukujen tulo, joiden summa on 1976. Perustele vastauksesi!

76.5. Olkoon $q = 2p$. Tarkastellaan q:n tuntemattoman ja p:n yhtälön ryhmää

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1q}x_q &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2q}x_q &= 0 \\ &\vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pq}x_q &= 0, \end{aligned}$$

missä jokainen kerroin a_{ij} on joukon $\{-1, 0, 1\}$ alkio. Osoita, että ryhmällä on ratkaisu $x_1, \ldots, x_q$, joka toteuttaa ehdot

a) x_j on kokonaisluku, $j = 1, \ldots, q$,

b) $x_j \neq 0$ ainakin yhdellä j:n arvolla,

c) $|x_j| \leq q, \quad j = 1, \ldots, q$.

76.6. Lukujono $\{u_n\}$ määritellään asettamalla $u_0 = 2$, $u_1 = \dfrac{5}{2}$ ja $u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2) - u_1$, $n = 1, 2, \ldots$. Osoita, että jokaisella positiivisella kokonaisluvulla n on

$$[u_n] = 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}},$$

missä $[x]$ on suurin kokonaisluku, joka on $\leq x$.

19. IMO, Belgrad, 1977

77.1. Neliön $ABCD$ sisäpuolelle piirretään tasasivuiset kolmiot ABK, BCL, CDM, DAN. Todista, että janojen KL, LM, MN, NK sekä AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN ja AN keskipisteet ovat säännöllisen 12-kulmion kärjet.

77.2. Äärellisessä lukujonossa jokaisen seitsemän peräkkäisen termin summa on negatiivinen ja jokaisen yhdentoista peräkkäisen termin summa on positiivinen. Määritä lukujonon termien suurin mahdollinen määrä.

77.3. Olkoon n kokonaisluku, $n \geq 2$. Olkoon V_n muotoa $1 + kn$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, olevien lukujen joukko. Sanomme, että luku $m \in V_n$ on *jaoton* V_n:ssä, jos ei ole olemassa V_n:n alkioita p ja q, joille $m = pq$. Todista, että V_n:ssä on luku r, joka voidaan ainakin kahdella eri tavalla kirjoittaa V_n:ssä jaottomien lukujen tuloksi. (Tulot, jotka eroavat vain tekijöiden keskinäisen järjestyksen suhteen, ovat samoja.)

77.4. Olkoot a, b, A ja B annettuja reaalilukuja ja

$$f(x) = 1 - a\cos x - b\sin x - A\cos 2x - B\sin 2x.$$

Todista, että jos $f(x) \geq 0$ kaikille reaaliluvuille x, niin $a^2 + b^2 \leq 2$ ja $A^2 + B^2 \leq 1$.

77.5. Olkoot a ja b positiivisia kokonaislukuja. Kun $a^2 + b^2$ jaetaan $(a + b)$:llä, saadaan osamäärä q ja jakojäännös r. Määritä kaikki parit (a, b), joille $q^2 + r = 1977$.

77.6 Olkoon f kaikilla kokonaisluvuilla määritelty funktio, jonka arvot ovat positiivisia kokonaislukuja. Todista, että jos

$$f(n + 1) > f(f(n))$$

kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n, niin

$$f(n) = n$$

kaikilla n.

20. IMO, Bukarest, 1978

78.1. Olkoot m ja n luonnollisia lukuja, $n > m \geq 1$. Luvun 1978^m kymmenjärjestelmäesityksen kolme viimeistä numeroa ovat samat kuin luvun 1978^n kymmenjärjestelmäesityksen kolme viimeistä numeroa. Määritä m ja n siten, että $m + n$ on pienin mahdollinen.

78.2. Olkoon P kiinteä piste annetun pallon sisällä ja A, B, C sellaisia pallon pisteitä, että PA, PB ja PC ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Määritä niiden pisteiden Q joukko, jotka ovat PA:n, PB:n ja PC:n määräämän suorakulmaisen särmiön P:stä alkavan lävistäjän toisia päätepisteitä.

78.3. Positiivisten kokonaislukujen joukko jaetaan kahdeksi yhteisalkiottomaksi osajoukoksi

$$\{f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots\} \quad \text{ja} \quad \{g(1), g(2), \ldots, g(n), \ldots\},$$

missä $f(1) < f(2) < \ldots < f(n) < \ldots$, $g(1) < g(2) < \ldots < g(n) < \ldots$ ja $g(n) = f(f(n))+1$ kaikilla $n \geq 1$. Määritä $f(240)$.

78.4. Kolmiossa ABC on $AB = AC$. Ympyrä sivuaa sisäpuolisesti kolmion ABC ympäri piirrettyä ympyrää sekä sivua AB pisteessä P ja sivua AC pisteessä Q. Osoita, että janan PQ keskipiste on kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän keskipiste.

78.5. Olkoon (a_k), $k = 1, 2, \ldots, n, \ldots$, jono keskenään eri suuria positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että kaikilla n pätee

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

78.6. Eräässä kansainvälisessä yhdistyksessä on 1978 jäsentä, jotka edustavat kuutta eri maata. Jäsenet on numeroitu 1, 2, ..., 1978. Osoita, että ainakin yhden jäsenen numero on kahden hänen maanmiehensä numeroiden summa tai kaksi kertaa erään hänen maanmiehensä numero.

21. IMO, Lontoo, 1979

79.1. Olkoot p ja q luonnollisia lukuja, joille pätee

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

Todista, että p on jaollinen 1979:llä.

79.2. Annetun suuntaissärmiön pohjina ovat viisikulmiot $A_1A_2A_3A_4A_5$ ja $B_1B_2B_3B_4B_5$. Viisikulmioiden kaikki sivut ja kaikki janat A_iB_j, i, $j = 1, 2, \ldots, 5$, on väritetty joko punaisiksi tai vihreiksi. Jokaisessa kolmiossa, jonka kärjet ovat suuntaissärmiön kärkiä ja jonka sivut ovat väritettyjä, on kaksi eriväristä sivua. Osoita, että pohjaviisikulmioiden kaikki kymmenen sivua ovat samanväriset.

79.3. Kaksi ympyrää leikkaavat toisensa. Olkoon toinen leikkauspisteistä A. Pisteestä A lähtee samalla hetkellä liikkumaan kumpaakin ympyrää pitkin piste tasaisella nopeudella samaan kiertosuuntaan. Pisteet palaavat yhden kierroksen jälkeen samanaikaisesti A:han. Todista, että tasossa on kiinteä piste P, jonka etäisyys molemmista liikkuvista pisteistä on joka hetki sama.

79.4. Olkoon piste P tasossa π ja Q π:n ulkopuolella. Määritä kaikki tason π pisteet R, joille suhde

$$\frac{|QP| + |PR|}{|QR|}$$

saa maksimiarvon.

79.5. Määritä kaikki reaaliluvut a, joille on olemassa ei-negatiiviset reaaliluvut x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 siten, että

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = a, \quad \sum_{k=1}^{5} k^3 x_k = a^2, \quad \sum_{k=1}^{5} k^5 x_k = a^3.$$

79.6. Olkoot A ja E säännöllisen kahdeksankulmion vastakkaisia kärkiä. Kärjestä A lähtee hyppimään sammakko. Se voi hypätä jokaisesta kahdeksankulmion kärjestä paitsi E:stä jompaan kumpaan viereiseen kärkeen. Saavuttuaan E:hen sammakko pysähtyy. Olkoon a_n tasan n:stä hypystä muodostuvien A:sta E:hen johtavien polkujen lukumäärä. Todista, että $a_{2n-1} = 0$, $a_{2n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x^{n-1} - y^{n-1}\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, missä $x = 2+\sqrt{2}$ ja $y = 2-\sqrt{2}$.

Huom. n:stä hypystä muodostuva *polku* on jono $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ kärkipisteitä, jolle on voimassa

(i) $P_0 = A$, $P_n = E$;

(ii) $P_i \neq E$ kaikilla i, $0 \le i \le n-1$;

(iii) P_i ja P_{i+1} ovat vierekkäisiä kärkiä kaikilla i, $0 \le i \le n-1$.

22. IMO, Washington, 1981

81.1. Olkoon P kolmion ABC sisäpiste ja D, E ja F pisteen P kohtisuorat projektiot suorilla BC, CA ja AB. Määritä ne pisteet P, joissa

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$$

on mahdollisimman pieni.

81.2. Olkoon $1 \le r \le n$. Tarkastellaan kaikkia joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ r-alkioisia osajoukkoja. Jokaisessa tällaisessa osajoukossa on pienin alkio. Olkoon $F(n, r)$ näiden pienimpien alkioiden aritmeettinen keskiarvo. Todista, että

$$F(n, r) = \frac{n+1}{r+1}.$$

81.3. Määritä luvun $m^2 + n^2$ suurin mahdollinen arvo, kun m ja n ovat joukkoon $\{1, 2, \ldots, 1981\}$ kuuluvia lukuja ja $(n^2 - mn - m^2)^2 = 1$.

81.4. (a) Millä luvuilla $n > 2$ on olemassa n peräkkäistä kokonaislukua, joista suurin on tekijänä muiden $n-1$:n pienimmässä yhteisessä jaettavassa?
(b) Millä n:n arvoilla on olemassa tasan yksi yllä kuvatun ominaisuuden omaava joukko?

81.5. Kolme samansäteistä ympyrää ovat kaikki erään kolmion sisällä ja leikkaavat toisensa samassa pisteessä O. Jokainen ympyröistä sivuaa erästä kolmion sivuparia. Todista, että kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste, kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste ja O ovat samalla suuoralla.

81.6. Funktiolle $f(x,\,y)$ on voimassa

$$\begin{aligned} f(0,\,y) &= y+1, \\ f(x+1,\,0) &= f(x,\,1), \\ f(x+1,\,y+1) &= f(x,\,f(x+1,\,y)) \end{aligned}$$

kaikilla ei-negatiivisilla kokonaisluvuilla x, y. Määritä $f(4,\,1981)$.

23. IMO, Budapest, 1982

82.1. Kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n määritellyn funktion $f(n)$ arvot ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja. Lisäksi

(a) kaikilla m ja n $f(m+n)-f(m)-f(n)$ on joko 0 tai 1;

(b) $f(2)=0$, $f(3)>0$ ja $f(9999)=3333$.

Määritä $f(1982)$.

82.2. Kolmio $A_1A_2A_3$ ei ole tasakylkinen. Kolmion sivut ovat a_1, a_2, a_3, ja a_i on kärjen A_i vastainen sivu. Kaikilla $i=1,\,2,\,3$ piste M_i on sivun a_i keskipiste ja T_i se piste, jossa kolmion sisään piirretty ympyrä sivuaa a_i:tä. Edelleen piste S_i saadaan peilaamalla piste T_i kulman A_i puolittajan kolmion $A_1A_2A_3$ sisään jäävän osan suhteen. Osoita, että suorilla M_1S_1, M_2S_2 ja M_3S_3 on yhteinen piste.

82.3. Tarkastellaan sellaisia positiivisten reaalilukujen jonoja $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, joille pätee $x_0=1$ ja $x_i \ge x_{i+1}$ kaikilla $i\in\mathbf{N}$.
a) Osoita, että jokaiselle tällaiselle jonolle on olemassa $n\ge 1$, jolla

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\ge 3{,}999.$$

b) Etsi sellainen jono $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, että kaikilla n

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}< 4.$$

82.4 Osoita, että jos yhtälöllä $x^3-3xy^2+y^3=n$, missä n on positiivinen kokonaisluku, on kokonaislukuratkaisu, niin sillä on ainakin kolme kokonaislukuratkaisua. Osoita, että yhtälöllä ei ole kokonaislukuratkaisua, kun $n=2891$.

82.5. Säännöllisen kuusikulmion $ABCDEF$ lävistäjät AC ja CE on jaettu sisäpisteissä M ja N siten, että $\dfrac{AM}{AC}=\dfrac{CN}{CE}=\lambda$. Määritä λ siten, että B, M ja N ovat samalla suoralla.

82.6. Olkoon S neliö, jonka sivun pituus on 100 ja olkoon L murtoviiva $A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$, joka on kokonaan S:n sisällä eikä leikkaa itseään. Oletetaan, että kaikilla S:n reunan piteillä P on olemassa L:n piste, jonka etäisyys P:stä on enintään $\frac{1}{2}$. Osoita, että on olemassa L:n pisteet X ja Y, joiden välinen etäisyys on enintään 1 ja joiden välissä olevan L:n osan pituus on vähintään 198.

24. IMO, Pariisi, 1983

83.1. Määritä kaikki positiivisten reaalilukujen joukossa määritellyt funktiot f, joiden arvot ovat positiivisia reaalilukuja ja jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

(1) $f(xf(y)) = yf(x)$ kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla x ja y,
(2) $f(x) \to 0$, kun $x \to +\infty$.

83.2. Olkoon A toinen samassa tasossa sijaitsevien erisäteisten ympyröiden C_1 ja C_2 kahdesta leikkauspisteestä; olkoot O_1 ja O_2 näiden ympyröiden keskipisteet. Toinen ympyröiden yhteisistä tangenteista sivuaa ympyrää C_1 pisteessä P_1 ja ympyrää C_2 pisteessä P_2, toinen ympyrää C_1 pisteessä Q_1 ja ympyrää C_2 pisteessä Q_2. Olkoon M_1 janan P_1Q_1 keskipiste ja M_2 janan P_2Q_2 keskipiste. Osoita, että kulmat O_1AO_2 ja M_1AM_2 ovat yhtä suuret.

83.3. Olkoot a, b ja c positiivisia kokonaislukuja, joista millään kahdella ei ole yhteistä alkutekijää (> 1). Osoita, että $2abc - ab - bc - ca$ on suurin kokonaisluku, jota ei voi esittää muodossa $xbc + yac + zab$, missä x, y ja z ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja.

83.4. Olkoon ABC tasasivuinen kolmio ja E janojen AB, BC ja CA pisteiden (A, B ja C mukaan lukien) muodostama joukko. Pitääkö paikkansa, että jaettiinpa E miten tahansa kahdeksi sellaiseksi joukoksi S ja T, että $S \cup T = E$ ja $S \cap T = \emptyset$, niin toinen joukoista sisältää jonkin suorakulmaisen kolmion kärjet? Todista väitteesi!

83.5. Onko olemassa 1983 positiivista keskenään eri suurta kokonaislukua, jotka kaikki ovat pienempiä kuin 10^5 ja joista mitkään kolme eivät ole aritmeettisen sarjan peräkkäisiä jäseniä? Todista väitteesi!

83.6. Olkoot a, b ja c kolmion sivujen pituudet. Osoita, että

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0.$$

Milloin vallitsee yhtäsuuruus?

25. IMO, Praha, 1984

84.1. Olkoot x, y ja z ei-negatiivisia reaalilukuja ja $x + y + z = 1$. Todista, että

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

84.2. Määritä kaksi positiivista kokonaislukua a ja b, joille pätee
(1) $ab(a + b)$ ei ole jaollinen 7:llä,
(2) $(a + b)^7 - a^7 - b^7$ on jaollinen luvulla 7^7.
Perustelu!

84.3. Tasossa on annettu pisteet A ja O. jokaiselle $X \neq O$ merkitään $a(X)$:llä säteiden OA ja OX välistä kulmaa, mitattuna vastapäivään OA:sta radiaaneissa $(0 \leq a(X) < 2\pi)$, ja $C(X)$:llä O-keskistä ympyrää, jonka säteen pituus on $|OX| + \dfrac{a(X)}{|OX|}$. Oletetaan, että jokainen tason piste on väritetty yhdellä äärellisestä joukosta värejä. Osoita, että on olemassa piste Y siten, että $a(Y) > 0$ ja Y sekä jokin $C(Y)$:n piste ovat samanväriset.

84.4. Olkoon $ABCD$ kupera nelikulmio. Ympyrä, jonka halkaisija on AB, sivuaa suoraa CD. Osoita, että CD-halkaisijainen ympyrä sivuaa suoraa AB jos ja vain jos BC ja AD ovat yhdensuuntaiset.

84.5. Olkoon d tason kuperan nelikulmion n-kulmion $(n > 3)$ kaikkien lävistäjien pituuksien summa ja p kyseisen n-kulmion piirin pituus. Osoita, että

$$n - 3 < \frac{2d}{p} < \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] - 2.$$

($[x]$ on suurin kokonaisluku, joka on pienempi tai yhtä suuri kuin x.)

84.6. Olkoot a, b, c ja d parittomia kokonaislukuja, $0 < a < b < c < d$, $ad = bc$ ja $a + d = 2^k$, $b + c = 2^m$ joillakin kokonaisluvuilla k, m. Osoita, että $a = 1$.

26. IMO, Joutsa, 1985

85.1. Nelikulmion $ABCD$ kärjet sijaitsevat erään ympyrän kehällä. Lisäksi on olemassa ympyrä, jonka keskipiste sijaitsee sivulla AB ja joka sivuaa nelikulmion muita sivuja. Osoita, että $AD + BC = AB$.

85.2. Olkoon n luonnollinen luku ja k kokonaisluku, $0 < k < n$, jolla ei ole yhteisiä alkutekijöitä luvun n kanssa, sekä $M = \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Jokainen joukon M alkioista on värjätty siniseksi tai valkoiseksi siten, että
(1) luvut i ja $n - i$ ovat samanväriset kaikilla $i \in M$ ja
(2) luvut i ja $|k - i|$ ovat samanväriset kaikilla $i \in M$, $i \neq k$.
Osoita, että kaikki joukon M alkiot ovat samanvärisiä.

85.3. Olkoon P polynomi, $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k$, jonka kertoimet a_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, ovat kokonaislukuja. Merkintä $w(P)$ tarkoittaa P:n parittomien kertoimien lukumäärää. Osoita: jos $Q_i(x) = (1+x)^i$, kun $i = 1, 2, \ldots$, niin $w(Q_{i_1} + Q_{i_2} + \ldots + Q_{i_n}) \geq w(Q_{i_1})$ jokaiselle kokonaislukujonolle $i_1, i_2, \ldots, i_n$, jolle $0 < i_1 < i_2 < \ldots < i_n$.

85.4. Joukossa M on 1985 eri suurta positiivista kokonaislukua. Yksikään joukon M alkio ei ole jaollinen millään lukua 26 suuremmalla alkuluvulla. Osoita, että joukosta M löytyy neljä eri suurta lukua, joiden tulo on sama kuin jonkin kokonaisluvun neljäs potenssi.

85.5. Piste O keskipisteenä piirretty ympyrä kulkee kolmion ABC kärkien A ja C kautta ja kohtaa sivut AB ja AC uudelleen toisistaan eroavissa pisteissä K ja N, tässä järjestyksessä. Kolmioiden ABC ja KBN ympäri piirretyt ympyrät leikkaavat täsmälleen kahdessa eri pisteessä B ja M. Osoita, että kulma OMB on suora.

85.6. Jokaista reaalilukua x_1 kohden määritellään jono $x_1, x_2, \ldots$ asettamalla

$$x_{n+1} = x_n \left(x_n + \frac{1}{n} \right),$$

kun $n \geq 1$. Osoita, että on olemassa yksi ja vain yksi luku x_1, jolla $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ kaikilla indeksin n arvoilla.

27. IMO, Varsova, 1986

86.1. Osoita, että jos positiivinen kokonaisluku d ei kuulu joukkoon $\{2, 5, 13\}$, niin on olemassa luvut $a \in \{2, 5, 13\}$ ja $b \in \{2, 5, 13, d\}$, joilla $a \neq b$ ja $ab-1$ ei ole kokonaisluvun neliö.

86.2. Olkoon $A_1A_2A_3$ tason kolmio ja P_0 tason piste. Merkitään $A_s = A_{s-3}$, kun $s \geq 4$. Määritellään pistejono $P_0, P_1, P_2, \ldots$, missä P_{k+1} on pisteen P_k kuva tason kierrossa pisteen A_{k+1} ympäri myötäpäivään kulman $120°$ verran ($k = 0, 1, 2, 3, \ldots$). Osoita, että jos $P_{1986} = P_0$, niin kolmio $A_1A_2A_3$ on tasasivuinen.

86.3. Säännöllisen viisikulmion kuhunkin kärkeen on liitetty kokonaisluku siten, että näiden viiden luvun summa on positiivinen. Jos joissakin peräkkäisissä kärjissä on luvut x, y ja z, misä $y < 0$, niin sallitaan operaatio, missä nämä luvut korvataan luvuilla $x + y$, $-y$, $z + y$. Tätä operaatiota toistetaan, kunnes kaikki viisi lukua ovat ei-negatiivisia. Pysähtyykö kuvailtu menettely välttämättä äärellisen monen askeleen jälkeen?

86.4. Pisteet A ja B ovat säännöllisen n-kulmion, $n \geq 5$, vierekkäisiä kärkiä ja O sen keskipiste. Kolmion OAB kanssa yhtenevä kolmio XYZ liikkuu tasossa siten, että aluksi Y on A:ssa, Z B:ssä ja X O:ssa. Y ja Z kiertävät n-kulmion kehän, ja X pysyy n-kulmion sisällä. Mikä on pisteen X muodostama kuvio?

86.5. Määritä kaikki ei-negatiivisilla reaaliluvuilla määritellyt ei-negatiivisia arvoja saavat funktiot f, joilla
(i) $f\,(x\,f(y))\,f(y) = f(x+y)$ kaikilla $x,\ y \geq 0$;
(ii) $f(2) = 0$;
(iii) $f(x) \neq 0$, kun $0 \leq x < 2$.

86.6. On annettu äärellinen joukko tason pisteitä, joiden koordinaatit ovat kokonaislukuja. Onko aina mahdollista värittää osa annetuista pisteistä punaisiksi ja loput valkoisiksi siten, että jokaisella jomman kumman koordinaattiakselin suuntaisella suoralla L olevien punaisten ja valkoisten pisteiden lukumäärät eroavat enintään yhdellä? Perustele vastauksesi!

28. IMO, Havanna, 1987

87.1. Olkoon $p_n(k)$ joukon $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ sellaisten permutaatioiden lukumäärä, joilla on täsmälleen k kiintopistettä. Osoita, että

$$\sum_{k=0}^{n} kp_n(k) = n!.$$

(Huomautus. Joukon S permutaatio on bijektio f joukolta S itselleen. Joukon S alkio i on kiintopiste, jos $f(i) = i$.)

87.2. Teräväkulmaisen kolmion kulman A puolittaja leikkaa sivun BC pisteessä L ja kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän pisteessä $N \neq A$. Pisteestä L sivuille AB ja AC piirretyt kohtisuorat leikkaavat nämä sivut pisteissä K ja M (tässä järjestyksessä). Osoita, että nelikulmion $AKNM$ ja kolmion ABC alat ovat yhtä suuret.

87.3. Oletetaan, että $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ ovat reaalilukuja ja $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Osoita, että kaikilla kokonaisluvuilla $k \geq 2$ on olemassa kokonaisluvut $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$, jotka eivät kaikki ole nollia, joilla $|a_i| \leq k-1$ kaikilla i ja joilla

$$|a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}.$$

87.4. Todista, ettei ole olemassa ei-negatiivisten kokonaislukujen joukossa määriteltyä funktiota f, jonka arvot ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja ja joka toteuttaa ehdon $f(f(n)) = n + 1987$ kaikilla n.

87.5. Olkoon n kokonaisluku ≥ 3. Osoita, että on olemassa n tason pistettä, joista minkä tahansa kahden eri pisteen etäisyys on irrationaaliluku, ja joista mitkä tahansa kolme eri pistettä määräävät kolmion, jonka ala on nollasta eroava rationaaliluku.

87.6. Olkoon n kokonaisluku, joka on suurempi tai yhtä suuri kuin 2. Osoita, että jos k^2+k+n on alkuluku kaikilla kokonaisluvuilla k, joilla $0 \le k \le \sqrt{n/3}$, niin k^2+k+n on alkuluku kaikilla kokonaisluvuilla k, joilla $0 \le k \le n-2$.

29. IMO, Canberra, 1988

88.1. Tarkastellaan kahta samassa tasossa olevaa samankeskistä ympyrää, joiden säteet ovat R ja r $(R > r)$. Olkoon P pienemmän ympyrän kehän kiinteä piste ja liikkukoon piste B suuremman ympyrän kehällä. Suora BP leikkaa suuremman ympyrän kehän myös pisteessä C. Pisteen P kautta kulkeva suoraa BP vastaan kohtisuora suora l leikkaa pienemmän ympyrän kehän myös pisteessä A. (Jos l on pienemmän ympyrän tangentti, niin $A = P$.)

(I) Määritä lausekkeen $BC^2 + CA^2 + AB^2$ arvojen joukko.
(II) Määritä janan AB keskipisteiden joukko.

88.2. Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja olkoot $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ joukon B osajoukkoja. Oletetaan, että

(a) jokaisessa joukossa A_i on tasan $2n$ alkiota,
(b) joukoissa $A_i \cap A_j$ $(1 \le i < j \le 2n+1)$ on kussakin tasan yksi alkio ja
(c) jokainen joukon B alkio kuuluu ainakin kahteen joukoista A_i.

Millä luvun n arvoilla voidaan jokaiseen joukon B alkioon liittää luku 0 tai 1 siten, että jokaisessa joukossa A_i on tasan n sellaista alkiota, johon on liitetty luku 0?

88.3. Olkoon f positiivisten kokonaislukujen joukossa määritelty funktio, jolle pätee

$$\begin{aligned} f(1) = 1, \quad f(3) &= 3, \\ f(2n) &= f(n), \\ f(4n+1) &= 2f(2n+1) - f(n), \\ f(4n+3) &= 3f(2n+1) - 2f(n). \end{aligned}$$

kaikille positiivisille kokonaisluvuille n.
Määritä niiden kokonaislukujen n, $1 \le n \le 1988$, lukumäärä, joille pätee $f(n) = n$.

88.4. Osoita, että epäyhtälön

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \ge \frac{5}{4}$$

toteuttavien reaalilukujen x joukko on yhdiste erillisistä väleistä, joiden pituuksien summa on 1988.

88.5. Suorakulmaisessa kolmiossa ABC on D hypotenuusaa BC vastaan piirretyn korkeusjanan kantapiste. Kolmioiden ABD ja ACD sisään piirrettyjen ympyröiden keskipisteiden kautta kulkeva suora leikkaa sivun AB pisteessä K ja sivun AC pisteessä L. Kolmion ABC ala on S ja kolmion AKL ala on T. Osoita, että $S \ge 2T$.

88.6. Olkoot a ja a positiivisia kokonaislukuja ja olkoon $a^2 + b^2$ jaollinen luvulla $ab + 1$. Osoita, että $\dfrac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ on kokonaisluvun neliö.

30. IMO, Braunschweig, 1989

89.1. Todista, että joukko $\{1, 2, \ldots, 1989\}$ voidaan esittää erillisten osajoukkojen A_i, $i = 1, 2, \ldots, 117$, yhdisteenä siten, että

(i) jokaisessa joukossa A_i on 17 alkiota;
(ii) kaikkien joukkojen A_i alkioiden summa on yhtä suuri.

89.2. Teräväkulmaisen kolmion ABC kulman A puolittaja leikkaa kolmion ympäri piirretyn ympyrän myös pisteessä A_1. Pisteet B_1 ja C_1 määritellään samalla tavalla. Olkoon A_0 suoran AA_1 ja kulmien B ja C vieruskulmien puolittajien leikkauspiste. Määritellään pisteet B_0 ja C_0 vastaavalla tavalla. Todista, että

(i) kolmion $A_0B_0C_0$ ala on kaksi kertaa niin suuri kuin kuusikulmion $AC_1BA_1CB_1$ ala;
(ii) kolmion $A_0B_0C_0$ ala on ainakin neljä kertaa niin suuri kuin kolmion ABC ala.

89.3. Olkoot n ja k positiivisia kokonaislukuja ja olkoon S tason n:n pisteen joukko, jolle pätee

(i) mitkään kolme S:n pistettä eivät ole samalla suoralla, ja
(ii) jokaista S:n pistettä P kohden on ainakin k S:n pistettä yhtä etäällä P:stä.

Todista, että

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2}n.$$

89.4. Olkoon $ABCD$ kupera nelikulmio jonka sivujen pituuksille pätee $AB = AD + BC$. Nelikulmion sisällä on piste P, jonka etäisyys suorasta CD on h ja jolle pätee $AP = h+AD$ ja $BP = h + BC$. Osoita, että

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}.$$

89.5. Todista, että jokaista positiivista kokonaislukua n kohden on olemassa n peräkkäistä positiivista kokonaislukua, joista mikään ei ole alkuluvun kokonaislukueksponenttinen potenssi.

89.6. Joukon $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, missä n on positiivinen kokonaisluku, permutaatiolla $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ sanotaan olevan ominaisuus T, jos $|x_i - x_{i+1}| = n$ ainakin yhdelle i joukossa $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$. Osoita, että jokaisella n niiden permutaatioden, joilla on ominaisuus T, lukumäärä on suurempi kuin niiden permutaatioiden, joilla ei ole ominaisuutta T.

31. IMO, Peking, 1990

90.1. Annetun ympyrän jänteet AB ja CD leikkaavat toisensa ympyrän sisällä pisteessä E. Piste M on janan EB sisäpiste ja Y on pisteiden D, E ja M kautta kulkeva ympyrä. Pisteen E kautta piirretty ympyrän Y tangentti leikkaa suoran BC pisteessä F ja suoran AC pisteessä G. Merkitään $\dfrac{|AM|}{|AB|} = t$. Määritä suhde $\dfrac{|EG|}{|EF|}$ suureen t funktiona.

90.2. Tarkastellaan joukkoa E, joka koostuu $2n-1$:stä eri pisteestä, jotka kaikki sijaitsevat annetun ympyrän kehällä ($n \geq 3$). Näistä pisteistä k kappaletta väritetään mustaksi. Kutsumme väritystä hyväksi, jos ainakin yhdellä parilla mustia pisteitä on se ominaisuus, että jommalla kummalla pisteparin määräämällä ympyränkaarella on sisäpisteinä täsmälleen n joukon E pisteistä.

Etsi pienin luvun k arvo, jolle jokainen joukon E k:n pisteen väritys on hyvä.

90.3. Määritä kaikki kokonaisluvut $n > 1$, joille $\dfrac{2^n + 1}{n^2}$ on kokonaisluku.

90.4. Olkoon Q^+ positiivisten rationaalilukujen joukko. Konstruoi funktio $f : Q^+ \to Q^+$ siten, että

$$f(x\,f(y)) = \frac{f(x)}{y}$$

kaikilla x, $y \in Q^+$.

90.5. Olkoon annettu kokonaisluku $n_0 > 1$. pelaajat A ja B valitsevat vuorotellen kokonaislukuja n_1, n_2, ... seuraavien sääntöjen mukaan. Tietäen luvun n_{2k} pelaaja A valitsee vuorollaan mielivaltaisesti luvun n_{2k+1}, joka toteuttaa ehdon $n_{2k} \leq n_{2k+1} \leq n_{2k}^2$. Pelaaja B, joka tietää luvun n_{2k+1}, valitsee puolestaan vuorollaan mielivaltaisesti luvun n_{2k+2}, jonka tulee toteuttaa ehto $\dfrac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}} = p^r$, missä $p \geq 2$ on alkuluku ja $r \geq 1$ on kokonaisluku (luvut p ja r eivät ole kiinteitä). Pelin aloittaa pelaaja A.

Pelaaja A voittaa pelin valitsemalla luvun 1990.
Pelaaja B voittaa pelin valitsemalla luvun 1.

Millä luvun n_0 arvoilla

(a) pelaajalla A on voittostrategia,
(b) pelaajalla B on voittostrategia,
(c) kummallakaan pelaajalla ei ole voittostrategiaa?

90.6. Osoita, että on olemassa konveksi 1990-kulmio, jolla on seuraavat kaksi ominaisuutta:

(a) kaikki monikulmion kulmat ovat yhtä suuret,
(b) monikulmion sivujen pituudet ovat luvut 1^2, 2^2, 3^2, ..., 1989^2, 1990^2 jossain järjestyksessä.

32. IMO, Sigtuna, 1991

91.1. Olkoon I kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän keskipisteja A', B', C' kulmien CAB, ABC ja BCA puolittajien ja sivujen BC, AC ja BA leikkauspisteet. Todista, että

$$\frac{1}{4} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \frac{8}{27}.$$

91.2. Olkoon $n > 6$ kokonaisluku ja olkoot a_1, a_2, …, a_k kaikki n:ää pienemmät positiiviset kokonaisluvut, joilla ei ole yhteisiä tekijöitä n:n kanssa. Todista, että jos

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_k - a_{k-1} > 0,$$

niin n on alkuluku tai luvun 2 kokonaislukueksponenttinen potenssi.

91.3. Olkoon $S = \{1, 2, \ldots, 280\}$. Määritä pienin n, jolle jokainen S:n n-alkioinen osajoukko sisältää viisi lukua, joista millään kahdella ei ole muita yhteisiä tekijöitä kuin 1.

91.4. Olkoon G yhtenäinen verkko, jossa on k sivua. Osoita, että verkon sivut voidaan varustaa numeroilla 1, 2, …, k siten, että kaikissa sellaisissa solmuissa, joihin liittyy ainakin kaksi sivua, kyseiseen solmuun liittyvien sivujen numeroiden suurin yhteinen tekijä on 1.

[*Verkon* muodostavat joukko, jonka alkioita kutsutaan *solmuiksi*, ja joukko, jonka alkioita kutsutaan *sivuiksi*. Jokainen sivu yhdistää toisiinsa erään solmuparin. Jokainen solmupari u, v kuuluu eneintään yhteen sivuun. Verkko on *yhtenäinen*, jos jokaista solmuparia x, y johden on olemassa jono solmuja $x = v_0$, v_1, …, $v_m = y$ siten, että v_i:tä ja v_{i+1}:tä yhdistää verkon sivu, $0 \leq i < m$.]

91.5. Olkoon ABC kolmio ja P sen sisäpiste. Osoita, että ainakin yksi kulmista $\angle PAB$, $\angle PBC$ ja $\angle PCA$ on pienempi tai yhtä suuri kuin $30°$.

91.6. Päättymätön reaalilukujono x_0, x_1, x_2, … on *rajoitettu*, jos on olemassa vakio C siten, että $|x_i| \leq C$ kaikilla $i \geq 0$. Olkoon $a > 1$ reaaliluku. Konstruoi päättymätön rajoitettu jono x_o, x_2, x_2, …, jolle pätee

$$|x_i - x_j||i - j|^a \geq 1$$

kaikilla luonnollisilla luvuilla i, j, $i \neq j$.

33. IMO, Moskova, 1992

K92.1. Määritä kaikki kokonaisluvut a, b ja c, $1 < a < b < c$, joille $(a-1)(b-1)(c-1)$ on luvun $abc - 1$ tekijä.

K92.2. Olkoon $\mathbf{R}$ reaalilukujen joukko. Määritä kaikki funktiot $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, joille pätee

$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$$

kaikilla x, $y \in \mathbf{R}$.

K92.3. Avaruudessa on annettuna yhdeksän pistettä, joista mitkään neljä eivät ole samassa tasossa. Pisteiden välisistä janoista täsmälleen n kappaletta on väritetty sinisiksi tai punaisiksi, ja loput ovat värittämättömiä. Määritä pienin n, jolle välttämättä jotkin kolme sinistä tai kolme punaista janaa muodostavat yksivärisen kolmion.

K92.4. Tasossa on annettuna ympyrä C, suora L, joka sivuaa C:tä, ja L:n piste M. Määritä kaikkien niiden pisteiden P joukko, jolla on seuraava ominaisuus: on olemassa L:n pisteet Q ja R siten, että M on janan QR keskipiste ja C kolmion PQR sisään piirretty ympyrä.

K92.5. Olkoon S äärellinen pistejoukko kolmiulotteisessa avaruudessa ja muodostukoot joukot S_x, S_y ja S_z joukon S pisteiden kohtisuorista projektioista yz-, zx- ja xy-tasoille. Merkitään $|A|$:lla äärellisen joukon A alkioiden lukumäärää. Osoita, että

$$|S|^2 \leq |S_x||S_y||S_z|.$$

(Huom. Pisteen kohtisuora projektio tasolle on pisteen kautta piirretyn, tasoa vastaan kohtisuoran suoran ja tason leikkauspiste.)

K92.6. Jokaisella positiivisella kokonaisluvulla n määritellään $S(n)$ suurimmaksi kokonaisluvuksi, jolle n^2 on k :n positiivisen neliöluvun summa kaikilla $k = 1, 2, \ldots, S(n)$ (positiivisia neliölukuja ovat luvut 1^2, 2^2, 3^2, ...).

(a) Todista, että $S(n) \leq n^2 - 14$ kaikilla $n \geq 4$.
(b) Määritä kokonaisluku n, jolle $S(n) = n^2 - 14$.
(c) Todista, että $S(n) = n^2 - 14$ pätee äärettömän monella kokonaisluvulla n.

34. IMO, Istanbul, 1993

K93.1. Olkoon $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$, missä $n > 1$ on kokonaisluku. Osoita, että $f(x)$ ei voi olla kahden kokonaislukukertoimisen ja vähintään astetta 1 olevan polynomin tulo.

K93.2. Olkoon D teräväkulmaisen kolmion ABC sisäpiste, joka toteuttaa ehdot $\angle ADB = \angle ACB + 90°$ ja $AC \cdot BD = AD \cdot BC$.

(a) Laske suhteen $\dfrac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$ arvo.
(b) Todista, että kolmioiden ACD ja BCD ympäri piirrettyjen ympyröiden pisteeseen C piirretyt tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

K93.3. Äärettömällä šakkilaudalla pelataan seuraavaa peliä. Pelin alussa laudalla on n^2 nappulaa, jotka on sijoitettu $n \times n$:n vierekkäisen ruudun muodostamaan neliöön, yksi kuhunkin ruutuun. Pelin siirto on hyppy vaaka- tai pystysuunnassa sellaisen ruudun yli, jossa on nappula, viereiseen tyhjään ruutuun. Nappula, jonka yli on hypätty, poistetaan laudalta. määritä ne n:n arvot, joilla peli voi loppua niin, että laudalle jää vain yksi nappula.

K93.4. Jos P, Q ja R ovat kolme tason pistettä, niin määritellään $m(PQR)$ kolmion PQR korkeusjanojen minimipituudeksi (ja jos P, Q ja R ovat samalla suoralla, asetetaan $m(PQR) = 0$). Olkoot A, B ja C kolme annettua tason pistettä. Todista, että jokaiselle tason pisteelle X pätee

$$m(ABC) \leq m(ABX) + m(AXC) + m(XBC).$$

K93.5. Olkoon $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Selvitä, onko olemassa funktiota $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ siten, että $f(1) = 2$, $f(f(n)) = f(n) + n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $f(n) < f(n+1)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

K93.6. Olkoon $n > 1$ kokonaisluku. n lamppua L_0, L_1, ..., L_{n-1} on järjestetty ympyrään. Jokainen lamppu joko palaa tai on sammuksissa. Suoritetaan jono operaatioita S_0, S_1, ..., S_i, ... Operaatio S_j vaikuttaa vain lamppuun L_j (eikä muihin lamppuihin) seuraavasti: Jos L_{j-1} palaa, niin S_j vaihtaa L_j:n tilan (sytyttää tai sammuttaa sen). Jos L_{j-1} on sammuksissa, S_j pitää L_j:n tilan ennallaan. Lamput on numeroitu modulo n siten, että $L_{-1} = L_{n-1}$, $L_0 = L_n$, $L_1 = L_{n+1}$ jne. Aluksi kaikki lamput palavat. Osoita, että

(a) on olemassa positiivinen kokonaisluku $M(n)$ siten, että $M(n)$:n operaation jälkeen kaikki lamput palavat jälleen;

(b) jos n on muotoa 2^k, niin kaikki lamput palavat $n^2 - 1$:n operaation jälkeen;

(c) jos n on muotoa $2^k + 1$, niin kaikki lamput palavat $n^2 - n + 1$:n operaation jälkeen.

35. IMO, Hongkong, 1994

94.1. Olkoot m ja n positiivisia kokonaislukuja. Olkoot a_1, a_2, ..., a_m joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ eri alkioita, joille pätee seuraavaa: niillä i ja j, joille pätee $a_i + a_j \leq n$ ja $1 \leq i \leq j \leq m$, on olemassa k, $1 \leq k \leq m$, jolle $a_i + a_j = a_k$. Osoita, että

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}.$$

94.2. ABC on tasakylkinen kolmio, jolle pätee $AB = AC$. Oletetaan, että:

(i) M on sivun BC keskipiste ja O on sellainen piste suoralla AM, että OB on kohtisuorassa sivua AB vastaan.

(ii) Q on mielivaltainen pisteistä B ja C eroava piste janalla BC.

(iii) E sijaitsee suoralla AB ja F suoralla AC niin, että E, Q ja F ovat eri pisteitä ja samalla suoralla.

Osoita, että OQ ja EF ovat kohtisuorassa, jos ja vain jos $QE = QF$.

94.3. Kun k on positiivinen kokonaisluku, $f(l)$ olkoon niiden joukon $\{k+1,\, k+2,\, \ldots,\, 2k\}$ alkioiden, joiden kaksijärjestelmäesityksessä on täsmälleen kolme ykköstä, lukumäärä.

a) Osoita, että kun m on positiivinen kokonaisluku, on olemassa ainakin yksi positiivinen kokonaisluku k, jolle $f(k) = m$.

b) Määritä kaikki sellaiset positiiviset kokonaisluvut m, että on olemassa täsmälleen yksi k, jolle pätee $f(k) = m$.

94.4. Määritä kaikki sellaiset positiivisten kokonaislukujen parit $(m,\, n)$, että

$$\frac{n^3+1}{mn-1}$$

on kokonaisluku.

94.5 Olkoon S lukua -1 aidosti suurempien reaalilukujen joukko. Etsi kaikki kuvaukset $f : S \to S$, jotka täyttävät seuraavat kaksi ehtoa:

(i) Kaikille $x,\, y \in S$ pätee $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$.

(ii) Kuvaus $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ aidosti kasvava kummallakin väleistä $-1 < x < 0$ ja $x > 0$.

94.6. Näytä, että on olemassa positiivisten kokonaislukujen joukko A, jolla on seuraava ominaisuus: Kun S on mikä tahansa ääretön joukko alkulukuja, niin on olemassa $k \geq 2$ ja kaksi positiivista kokonaislukua $m \in A$ ja $n \notin A$, joista kumpikin on joukkoon S kuuluvien k:n eri alkion tulo.