Kappa 2014: tehtävät

Kierrokset 1 – 5

1. Olkoon $\triangle ABC$ mielivaltainen kolmio. Osoita, että:

- On mahdollista piirtää kolmion $\triangle ABC$ sisään ellipsi, joka sivuaa kolmion jokaista sivua sen keskipisteessä.
- Näistä sivujen keskipisteistä voidaan piirtää janat kolmion vastapäisiin kärkiin. Osoita, että nämä kolme janaa leikkaavat toisensa täsmälleen ellipsin keskipisteessä.

2. Sanomme, että luku on *ylialkuluku*, jos luvun jokainen peräkkäisten numeroiden jono muodostaa alkuluvun. Jotta esimerkiksi 1234 olisi ylialkuluku kymmenjärjestelmässä, olisi lukujen 1234, 123, 234, 12, 23, 34, 1, 2, 3 ja 4 oltava alkulukuja.

a) Mikä on suurin ylialkuluku kymmenjärjestelmässä?

Luku voidaan kirjoittaa eri kantajärjestelmissä. Esimerkiksi 12-kantaisessa lukujärjestelmässä 73 on 61_{12}, koska $73 = 6 \cdot 12 + 1$. Jotta 73 olisi ylialkuluku 12-järjestelmässä, olisi siis lukujen 1_{12}, 6_{12} ja 61_{12} oltava alkulukuja.

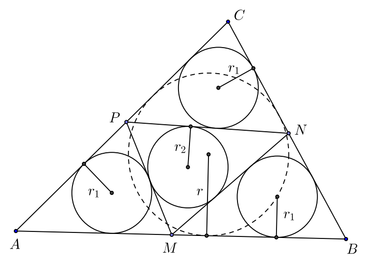
b) Mikä on suurin ylialkuluku 7-kantaisessa lukujärjestelmässä? Anna vastaus sekä 7-järjestelmän että kymmenjärjestelmän lukuna.

3. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3\left(x^2+y^2+z^2\right)=1 \\ x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 = xyz(x+y+z)^3 \end{cases}$$

reaalilukujen joukossa.

4. Kolmion $\triangle ABC$ sivuilta AB, BC ja CA valitaan sellaiset pisteet M, N ja P, että kolmioiden $\triangle AMP$, $\triangle BNM$ ja $\triangle CPN$ sisään piirretyillä ympyröillä on sama säde r_1. Kolmion $\triangle MNP$ sisään piirretyn ympyrän säde on r_2. Osoita, että $r_1 + r_2 = r$, missä r on kolmion $\triangle ABC$ sisään piirretyn ympyrän säde.



5. Tässä tehtävässä tarkastellaan $m \times n$-kokoisia suorakulmaisia ruudukkoja; m on ruudukon rivien ja n sen sarakkeiden lukumäärä. Joihinkin ruudukon ruutuihin on kirjoitettu jokin kokonaisluku.

Olkoon $A(m, n, k)$ erilaisten tapojen määrä sijoittaa $m \times n$-ruudukkoon k lukua niin että

- Kussakin sarakkeessa on enintään yksi luvulla varustettu ruutu.

- Jos sarakkeessa i on luvulla varustettu ruutu rivillä j, niin sarakkeessa $i+1$ ei ole luvulla varustettuja ruutuja missään rivin j alapuolella olevassa ruudussa.
- Jos jossain ruudussa R on luku, mutta sen vasemmalla puolella olevassa ruudussa ei ole lukua, niin ruudussa R on luku 0.
- Jos luvulla varustetussa ruudussa R ei ole luku 0, niin siinä on jokin luvuista $-u, \ldots, -1, 1, 2, \ldots, h$, missä u on R:n alapuolella olevien ruutujen lukumäärä ja h R:n oikealla puolella olevien ruutujen lukumäärä; R itse mukaan lukien.

Olkoon $B(m, n, k)$ erilaisten tapojen määrä sijoittaa $m \times n$-ruudukkoon k lukua seuraavasti:

- Kussakin sarakkeessa on enintään yksi luvulla varustettu ruutu.
- Sellaisella rivillä, jossa on j luvulla varustettua ruutua, kussakin ruudussa on jokin luvuista $1, 2 \ldots, j$ niin, että jokainen luku esiintyy tasan yhden kerran.

Todista, että

(1) $A(1, n, k) = n(n-1)\cdots(n-k+1)$.

(2) $A(m, n, k) = B(m, n, k)$.

Loppukilpailu

1. Osoita, että polynomilla

$$p(z) = 3z^{11} - 6iz^{10} + z^8 - 2iz^7 + z^6 - 2iz^5 + z^4 - 2iz^3 + 3z - 6i$$

on ainakin yksi nollakohta yksikköympyrällä $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

2. Onko olemassa sellaista funktiota $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, jolle pätee $f(f(a)) = 2a$ kaikilla $a \in \mathbb{N}$?