Lukion matematiikkakilpailu
Loppukilpailu 25. 1. 1997

1. Määritä ne luvut a, joille yhtälöllä

$$a3^x + 3^{-x} = 3$$

on tasan yksi ratkaisu x.

2. Ympyrät, joiden säteet ovat R ja r, missä $R > r$, sivuavat toisiaan ulkopuolisesti. Ympyröille piirretään yhteinen tangentti, joka ei kulje ympyröiden sivuamispisteen kautta. Tämän tangentin ja ympyröiden rajoittamaan alueeseen piirretään mahdollisimman suuri ympyrä. Kuinka suuri on tämän ympyrän säde?

3. Pyöreän pöydän ääressä on 12 ritaria. Jokainen ritari on vihoissa viereisten ritarien, mutta ei muiden ritarien, kanssa. Viisi ritaria on valittava pelastamaan prinsessaa. Yhtään vihamiesparia ei haluta mukaan. Kuinka monella eri tavalla valinta voidaan suorittaa?

4. Laske kaikkien sellaisten nelinumeroisten lukujen, joiden kymmenjärjestelmäesityksessä on vain parittomia numeroita, summa.

5. Sijoita tasoon n pistettä ($n \geq 3$) niin, että minkään kahden pisteen etäisyys ei ylitä yhtä ja täsmälleen n pisteparin välinen etäisyys on yksi.

Aikaa: 3 tuntia