

Lukion matematiikkakilpailu

Loppukilpailu 2. 2. 2001

1. Suorakulmaisessa kolmiossa ABC hypotenuusaa AB vastaan piirretty korkeusjana on CF . F :n kautta kulkeva B -keskinen ympyrä ja samansäteinen A -keskinen ympyrä leikkaavat toisensa sivun CB pisteessä. Määritä suhde $FB : BC$.
2. Toisiaan leikkaamattomien käyrien yhtälöt ovat $y = ax^2 + bx + c$ ja $y = dx^2 + ex + f$, missä $ad < 0$. Todista, että on olemassa tason suora, joka ei leikkaa kumpaakaan näistä käyristä.
3. Luvut a , b ja c ovat positiivisia kokonaislukuja ja $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$. Osoita, että

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{41}{42}.$$

4. Jokaviikkoisessa jokeriarvonnassa arvotaan seitsemän numeron jono. Jokainen numero voi olla mikä tahansa luvuista 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Kuinka suuri on todennäköisyys, että jokeriarvonnan jonossa esiintyy korkeintaan viittä eri numeroa?
5. Määritä sellaiset $n \in \mathbb{N}$, että $n^2 + 2$ on luvun $2 + 2001n$ tekijä.

Aikaa: 3 tuntia

Kirjoita kukin ratkaisu omalle paperilleen.

Muista kirjoittaa nimesi kuhunkin paperiin.

Laskimien ja taulukkokirjojen käyttö on kielletty.

Kotisivuja:

<http://www.maol.fi> (MAOL)

<http://www.math.helsinki.fi/~smy/olympia> (matematiikkavalmennus)