Lukion matematiikkakilpailu
Loppukilpailu 8. 2. 2002

1. Funktiolle f on voimassa $f(\cos x) = \cos(17x)$ kaikilla reaaliluvuilla x. Osoita, että $f(\sin x) = \sin(17x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

2. Osoita: jos

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c},$$

niin myös

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n+b^n+c^n},$$

kun n on pariton positiivinen kokonaisluku.

3. n tytöstä ja n pojasta muodostetaan arpomalla n paria. Kuinka suuri on todennäköisyys saada ainakin yksi tyttöpari? Millä luvun n arvoilla tämä todennäköisyys on yli 90%?

4. Kuperalla (konveksilla) kuviolla $\mathcal{K}$ on seuraava ominaisuus: kun sitä katsotaan mistä hyvänsä tietyn ympyrän $\mathcal{Y}$ pisteestä, se näkyy suorassa kulmassa. Osoita, että kuvio on symmetrinen $\mathcal{Y}$:n keskipisteen suhteen. [Kuvio on *kupera*, jos jokaisen kahden siihen kuuluvan pisteen välinen jana kuuluu kuvioon. Kuperan kuvion jokaisen reunapisteen kautta voidaan piirtää yksi tai useampi suora niin, että kuvion sisäosa on kokonaan suoran rajoittamassa puolitasossa.]

5. Tasossa on säännöllinen 17-kulmio $\mathcal{P}$ ja sen ympäri piirretty ympyrä $\mathcal{Y}$. 17-kulmion $\mathcal{P}$ kärjet väritetään niin, että kärjet $A, B \in \mathcal{P}$ ovat erivärisiä, jos niiden rajoittamalla lyhyemmällä ympyrän $\mathcal{Y}$ kaarella on päätepisteet mukaan lukien $2^k + 1$ monikulmion $\mathcal{P}$ kärkeä jollakin $k \in \mathbb{N}$. Mikä on pienin määrä värejä, joilla 17-kulmion $\mathcal{P}$ kärjet voi värittää?

Aikaa: 3 tuntia

Kirjoita kukin ratkaisu omalle paperilleen.
Muista kirjoittaa nimesi kuhunkin paperiin.
Laskimien ja taulukkokirjojen käyttö on kielletty.

Kotisivuja:
`http://www.maol.fi` (MAOL)
`http://www.math.helsinki.fi/~smy/olympia` (matematiikkavalmennus)