Lukion matematiikkakilpailu

Loppukilpailu 7. 2. 2003

1. Kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän keskipiste on I. Puolisuorat AI, BI ja CI leikkaavat kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän pisteissä D, E ja F. Todista, että AD ja EF ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

2. Minkä peräkkäisten kokonaislukujen välillä on lausekkeen

$$\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\frac{1}{x_3+1}+\cdots+\frac{1}{x_{2001}+1}+\frac{1}{x_{2002}+1}$$

arvo, kun $x_1 = 1/3$ ja $x_{n+1} = {x_n}^2 + x_n$?

3. Pöydällä on kuuden eri ihmisen tyhjät kukkarot. Kuinka monella tavalla niihin voidaan sijoittaa 12 kahden euron kolikkoa niin, että korkeintaan yksi jää tyhjäksi.

4. Etsi ne positiivisten kokonaislukujen parit (n, k), joille

$$(n+1)^k - 1 = n!.$$

5. Pelaajat Aino ja Eino valitsevat vuorotellen eri lukuja joukosta $\{0, \ldots, n\}$, missä $n \in \mathbb{N}$ on ennalta kiinnitetty luku. Peli päättyy, kun jommankumman pelaajan luvuista voi valita neljä, jotka sopivassa järjestyksessä muodostavat aritmeettisen jonon. Pelin voittaa pelaaja, jonka luvuista tällaisen jonon voi muodostaa. Osoita, että on olemassa sellainen n, että aloittajalla on voittostrategia. Etsi mahdollisimman pieni tällainen n.

Aikaa 3 tuntia

Kirjoita kukin ratkaisu omalle paperilleen.
Muista kirjoittaa nimesi kuhunkin paperiin.
Laskimien ja taulukkokirjojen käyttö on kielletty.

Kotisivuja:	`http://www.maol.fi` (MAOL) `http://www.math.helsinki.fi/~smy/olympia` (mat.valmennus)