

Lukion matematiikkakilpailu

Loppukilpailu 6. helmikuuta 2004

Yleiset ohjeet:

- Työaikaa 3 tuntia.
- Laskimien ja taulukoiden käyttö ei ole sallittua.
- Eri tehtävien vastaukset eri papereille!
- Jokaiseen vastauspaperiin oma nimi!
- Vain vastaukset, jotka käsialan puolesta ovat luettavissa, arvostellaan.

1. Yhtälöillä

$$x^2 + 2ax + b^2 = 0 \quad \text{ja} \quad x^2 + 2bx + c^2 = 0$$

on kummallakin kaksi erisuurta reaalista ratkaisua. Kuinka monta reaalista ratkaisua on yhtälöllä

$$x^2 + 2cx + a^2 = 0?$$

2. Luvut a , b ja c ovat positiivisia kokonaislukuja ja

$$\frac{a\sqrt{3} + b}{b\sqrt{3} + c}$$

on rationaaliluku. Osoita, että

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c}$$

on kokonaisluku.

3. Ympyrät, joiden säteet ovat r ja R , sivuavat toisiaan ulkopuolisesti. Kuinka pitkän janan ympyröiden sivuamispisteen kautta kulkevasta ympyröiden yhteisestä tangentista erottavat ympyröiden kaksi muuta yhteistä tangenttia?

4. Luvut $2005! + 2$, $2005! + 3$, \dots , $2005! + 2005$ muodostavat 2004:n peräkkäisen kokonaisluvun jonon, jossa ei ole yhtään alkulukua. Onko olemassa jokin 2004:n peräkkäisen kokonaisluvun jono, jossa on tasan 12 alkulukua?

5. Valtakunnassa otetaan käyttöön uusi rahayksikkö, markka, joka jakautuu sataan penniin. Minkälaisia kolikoita olisi lyötävä, jotta kaikki markkaa pienemmät ostokset voitaisiin maksaa tasarahalla mahdollisimman vähin kolikoin, ja erilaisia kolikoita olisi kolme?