

Lukion matematiikkakilpailun

loppukilpailu, 3. 2. 2006

1. Määritä kaikki positiivisten kokonaislukujen parit (x, y) , joille

$$x + y + xy = 2006.$$

2. Osoita, että kaikilla reaaliluvuilla a pätee

$$3(1 + a^2 + a^4) \geq (1 + a + a^2)^2.$$

3. Luvut p , $4p^2 + 1$ ja $6p^2 + 1$ ovat alkulukuja. Määritä p .

4. Kolmion kaksi keskijanaa ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Todista, että kolmion keskijanat ovat erään suorakulmaisen kolmion sivut.

5. Kuvan 16×16 -ruudukolla pelataan Nelipe-peliä seuraavasti: Kaksi pelaajaa kirjoittaa vuoroin ruudukon eri ruutuihin kokonaislukuja $1, 2, \dots, 16$. Luku pitää valita niin, ettei mikään luku toistu millään rivillä, sarakkeella eikä missään kuvan 16 pikkuneliössä. Pelin häviää ensimmäinen, joka ei voi siirtää. Kumpi pelaajista voittaa, aloittaja vai toinen pelaaja, kun pelaajat pelaavat parhaalla mahdollisella tavalla?

