Lukion matematiikkakilpailu 2.2.2007

Ratkaisuehdotuksia

1. *Osoita, että kun alkuluku jaetaan 30:llä, jakojäännös on joko* 1 *tai alkuluku. Päteekö samanlainen väite, kun jakaja on* 60 *tai* 90*?*

Ratkaisu. Tarkastellaan jakoyhtälöä $n = 30q + r$, $r < 30$. Jos r on yhdistetty luku, se on joko parillinen tai pariton. Jos se on parillinen, myös n on parillinen. Jos n on alkuluku, $n = 2$. Silloin myös $r = 2$. Lukua 30 pienemmät parittomat yhdistetyt luvut ovat 9, 15, 21 ja 25. Jokaisella näistä on yhteinen tekijä luvun 30 kanssa, joten n ei voi olla alkuluku. Mutta 109 on alkuluku, ja sen jakojäännös 60:llä jaettaessa on yhdistetty luku 49. Samoin luku $139 = 90 + 49$ on alkuluku.

2. *Tasossa on viisi pistettä, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla. Osoita, että jotkin neljä näistä pisteistä ovat kuperan nelikulmion kärkiä.*

Ratkaisu. Tarkastellaan kaikkia kolmioita, jotka voidaan muodostaa annetuista pisteistä. Tällainen kolmio saattaa sisältää yhden tai kaksi annetuista pisteistä sisäpisteinään. Kolmioiden joukossa on ainakin yksi, sanokaamme ABC, joka sisältää mahdollisimman monta annetuista pisteistä sisäpisteinään. Suorat AB, BC ja CA jakavat tason seitsemäksi erilliseksi alueeksi. Jos jokin muista pisteistä D ja E, sanokaamme D, kuuluu johonkin kolmesta kulmanmuotoisesta mainittujen suorien määrittämistä tason osa-alueista, sanokaamme suorien AB ja AC määrittämään, niin kolmio DBC sisältää kolmiossa ABC ehkä olevan pisteen E ja pisteen A. Tämä on ristiriidassa ABC:n oletetun maksimaalisuusominaisuuden kanssa. Siis joko ainakin toinen pisteistä D ja E, sanokaamme D, kuuluu alueeseen, jota rajoittaa yksi kolmion sivu, esimerkiksi BC, ja kahden muun jatkeet tai sitten D ja E ovat molemmat kolmion ABC sisällä. Edellisessä tapauksessa $ABDC$ on kupera nelikulmio. Jälkimmäisessä tapauksessa suora DE leikkaa tasan kaksi kolmion sivuista, esimerkiksi AB:n ja AC:n. Silloin $DEBC$ tai $EDBC$ on kupera nelikulmio.

3. *Määritä yhtälön*

$$x^8 - x^7 + 2x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + \frac{5}{2} = 0$$

reaalisten juurten lukumäärä.

Ratkaisu. Merkitään yhtälön vasenta puolta $f(x)$:llä. Nähdään hetli, että $f(x) > 0$ kaikilla $x \le 0$. Jos $x \ge 1$, niin $x^k \ge x^{k-1}$, joten $f(x) > 0$, kun $x \ge 1$. Huomataan myös, että

$$f(x) = -x(1-x)(x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 4x) + \frac{5}{2}.$$

Tunnetusti $x(1-x) \le \frac{1}{4}$, kun $0 < x < 1$. Koska $x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 4x < 1 + 2 + 3 + 4 = 10$, nähdaan, että $f(x) > 0$ myös,kun $0 < x < 1$. Yhtälöllä ei ole reaalisia juuria.

4. *Salavaaran kaupunkiin rakennetaan kuuden viraston välille pikoteknologiaa käyttävä tietoliikenneverkko niin, että aina kahden viraston välillä on suora kaapeliyhhteys. Verkon rakentaminen kilpailutetaan kolmen operaattorin välillä siten, että kukin yhteys kilpailutetaan erikseen. Kun verkko on rakennettu, huomataan, että eri operaattorien järjestelmät eivät ole keskenään yhteensopivia. Kaupunki joutuu hylkäämään siksi kahden operaattorin rakentamat yhteydet, mutta nämä hylättävät operaattorit valitaan niin, että vahinko on mahdollisimman pieni. Kuinka moni virasto vähintään voi olla keskenään yhteydessä, mahdollisesti monen yhteyden kautta, kun tilanne oli alun perin pahin mahdollinen?*

Ratkaisu. Osoitetaan, että ainakin neljä virastoa voi olla yhteydessä saman operaattorin linjoilla. Tehdään vastaoletus: enintään kolme virastoa voi olla tällä tavalla keskenään yhteydessä. Olkoot virastot A, B, C, D, E ja F. ja operaattorit 1, 2 ja 3. Koska A on yhdistetty kaikkiin viiteen muuhun virastoon, se on yhdistetty ainakin kahteen muuhun, esimerkiksi B:hen ja C:hen, saman operaattorin, esimerkiksi 1:n, toimesta. Jos C on yhdistetty johonkin muuhun kuin A:han ja B:hen 1:n toimesta, syntyy ainakin neljän viraston yhteys. Oletetaan siis, että C:n yhteydet D:hen, E:hen ja F:ään on rakentanut joko operaattori 2 tai operaattori 3. Kolmesta yhteydestä ainakin kaksi on saman operaattorin yhteyksiä, joten voidaan olettaa, että C on yhdistetty D:hen ja E:hen operaattorin 2 toimesta. Jos mikä hyvänsä yhteyksistä AD, AE, BD, BE on operaattorin 1 tai 2 tekemä, syntyy neljän viraston yhteys. Kaikki nämä ovat siis operaattorin 3 linjoja. Mutta näin A, B, D ja E muodostavat yhdistetyn nelikön.

Eräs esimerkki tilanteesta, jossa enintään neljä virastoa voi olla yhteydessä on seuraava: operaattori 1: yhteydet AB, AC, AF, BC ja BF, operaatori 2: CD, CE, DE, DF ja EF, operaattori 3: AD, AE, BD, BE ja CF.

5. *Osoita, että on olemassa sellainen kokonaiskertoiminen polynomi $P(x)$, että yhtälöllä $P(x) = 0$ ei ole kokonaislukuratkaisuja, mutta jokaisella positiivisella kokonaisluvulla n on olemassa $x \in \mathbb{Z}$, jolle $n \mid P(x)$.*

Ratkaisu. Valitaan $P(x) = 6x^2 - 5x + 1 = (2x-1)(3x-1)$. Polynomin nollakohdat ovat $\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{3}$. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Silloin $n = 2^a \cdot m$, missä m on jokin pariton luku ja $a \geq 0$. Jos $r = \frac{1}{2}(m+1)$, niin $2r - 1 = m$. Silloin kaikki luvut $2(r+km) - 1$ ovat jaollisia m:llä. Lukujen 2^a ja 3 suurin yhteinen tekijä on 1. Silloin on olemassa kokonaisluvut b ja c niin, että $3b + 2^a c = 1$. Kaikki luvut $3(b + k2^a) - 1$ ovat jaollisia 2^a:lla. Lukujen 2^a ja m suurin yhteinen tekijä on 1. Ns. kiinalaisen jäännöslauseen perusteella on olemassa x, joka m:llä jaettaessa antaa jakojäännöksen r ja 2^a:lla jaettaessa jakojäännöksen b. Edellisen perusteella $2x - 1$ on jaollinen m:llä ja $3x - 1$ on jaollinen 2^a:lla. Siis $(2x - 1)(3x - 1)$ on jaollinen $2^a \cdot m$:llä.

[Kiinalaisen jäännöslauseen todistus: oletetaan, että m_1:n ja m_2:n suurin yhteinen tekijä on 1. Silloin $x_1 m_1 + x_2 m_2 = 1$ joillain x_1 ja x_2. Aseteaan olkoon b_1 ja b_2 mielivaltaisia kokonaislukuja. Asetetaan $x = x_1 m_1 b_2 + x_2 m_2 b_1 = (1 - x_2 m_2) b_2 + x_2 m_2 b_1 = b_2 + q_2 m_2$. Silloin myös $x = x_1 m_1 b_2 + (1 - x_1 m_1) b_1 = b_1 + q_1 m_1$. Luvun x jakojäännös $m_1$llä jaettaessa on b_1 ja m_2:lla jaettaessa b_2.]