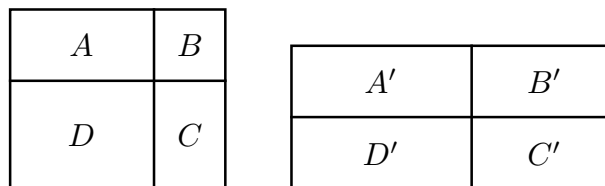


1. Erään tason pisteiden lämpötila riippuu pisteestä niin, että pisteen  $(x, y)$  lämpötila on  $x^2 + y^2 - 6x + 4y$ . Määritä tason kylmin piste ja sen lämpötila.
2. Polynomien  $P$  kertoimet ovat kokonaislukuja ja pätee  $P(3) = 4$  ja  $P(4) = 3$ . Kuinka monelle kokonaisluvulle  $x$  voi olla  $P(x) = x$ ?
3. Ympyrät  $\mathcal{Y}_0$  ja  $\mathcal{Y}_1$  sijaitsevat toistensa ulkopuolella. Ympyrän  $\mathcal{Y}_0$  keskipisteestä  $O_0$  piirretään ympyrää  $\mathcal{Y}_1$  sivuavat puolisuorat, ja ympyrän  $\mathcal{Y}_1$  keskipisteestä  $O_1$  vastaavasti ympyrää  $\mathcal{Y}_0$  sivuavat puolisuorat. Puolisuorat leikkaavat ympyrän  $\mathcal{Y}_i$  pisteissä  $A_i$  ja  $B_i$ . Osoita, että jانات  $A_0B_0$  ja  $A_1B_1$  ovat yhtä pitkät.
4. Oheisessa kuviossa vasemmanpuoleinen suorakaide on jaettu sivujen suuntaisilla janoilla neljään osaan, joiden alat ovat  $A, B, C$  ja  $D$ , sekä oikeanpuoleinen suorakaide vastaavalla tavalla osiin, joiden alat ovat  $A', B', C'$  ja  $D'$ . Tiedetään, että  $A \leq A', B \leq B', C \leq C'$  mutta  $D \leq B'$ . Todista, että vasemmanpuoleisen suorakaiteen ala on pienempi tai yhtä suuri kuin oikeanpuoleisen eli  $A + B + C + D \leq A' + B' + C' + D'$ .



5. Kutsutaan askelpituuksien joukkoa  $D \subset \mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$  *loistavaksi*, jos sillä on seuraava ominaisuus:

Aina kun kokonaislukujen joukko ositetaan kahteen osaan  $A$  ja  $\mathbb{Z} \setminus A$ , niin ainakin toinen osista sisältää alkioita  $a-d, a, a+d$  (eli  $\{a-d, a, a+d\} \subset A$  tai  $\{a-d, a, a+d\} \subset \mathbb{Z} \setminus A$ ) joillakin luvuilla  $a \in \mathbb{Z}, d \in D$ .

Esimerkiksi yhden alkion joukko  $\{1\}$  ei ole loistava, sillä kokonaislukujen joukon voi osittaa parillisiin ja parittomiin lukuihin, eikä kumpikaan näistä osista sisällä kolmea peräkkäistä lukua.

Osoita, että  $\{1, 2, 3, 4\}$  on loistava mutta mikään sen aito osajoukko ei ole.

Laskuaikaa on **3 tuntia**.

Tee kukin tehtävä omalle konseptiarkin sivulle.

Merkitse koepaperiin selvästi tekstaten oma nimesi ja yhteystietosi (koulun nimi, kotiosoite ja sähköpostiosoite).