13. 11. Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun perussarja 2012

1. Timantti on lohjennut kahdeksi palaksi, joiden massojen suhde on $3:4$. Kokonaisen timantin arvo on suoraan verrannollinen massan neliöön. Lohjenneen timantin arvo on siis alkuperäisestä arvosta

a) alle puolet	b) vähentynyt alle 50%
c) noin 51%	d) noin 49%

2. Erään koulun oppilaista neljä viidesosaa oli hunneja ja loput olivat vandaaleja. Käytöshäiriöiden vuoksi koulusta jouduttiin erottamaan kaksi kolmasosaa hunneista, mutta yhtään vandaalia ei tarvinnut erottaa. Kuinka suuri osuus kouluun jääneistä oppilaista on vandaaleja?

a) $1/3$	b) $3/8$	c) $3/7$	d) $1/2$

3. Mitkä seuraavista vertailuista ovat tosia?

a) $2^{2^2} > 3^3$	b) $3^{3^3} \geq 5^5$
c) $(-4)^{-4} < (-5)^{(-5)}$	d) $((-2)^2)^{((-2)^2)} = 4^4$

4. Luku $\dfrac{2^{2013}+2^{2011}}{2^{2012}-2^{2010}}$ on

a) 2	b) $\dfrac{10}{3}$	c) $2^{2012}+1$	d) $\dfrac{2^{13}+2^{11}}{2^{12}-2^{10}}$

5. Puolipallolla ja suoralla kartiolla on sama pohja ja niiden vaipat ovat pinta-alaltaan yhtä suuret. Olkoon V_{pp} puolipallon tilavuus ja V_{k} kartion tilavuus. Tällöin

a) $V_{\text{pp}} > V_{\text{k}}$	b) $V_{\text{pp}} < V_{\text{k}}$	c) $V_{\text{k}}/V_{\text{pp}} = \sqrt{3}/2$	d) $V_{\text{k}}/V_{\text{pp}} = 3/\sqrt{2}$

6. Useista pikkukuutioista, joiden särmien pituudet ovat 1, 2 ja 3, kasataan suuri kuutio, jonka särmän pituus on 5 (ja joka ei ole sisältä ontto). Tällöin:

a) Kaikkia pikkukuutiotyyppejä ei välttämättä tarvita kasaamisessa.
b) Pikkukuutioita tarvitaan vähintään 50 suuren kuution rakentamiseen.
c) Suuren kuution pinnasta ei voi välttämättä päätellä, onko kasaamisessa käytetty pikkukuutioita vähemmän vai enemmän kuin 100.
d) Käytettyjen pikkukuutioiden yhteispinta-ala on pariton kokonaisluku.

7. Kahden ympyrän säteet ovat $\sqrt{3}$ ja 1 sekä keskipisteiden välinen etäisyys 2. Laske ympyröiden leikkausalueen pinta-ala.

8. Olkoon f toisen asteen polynomi, jolla on kokonaislukukertoimet. Lisäksi $f(k)$ on viidellä jaollinen, kun k on kokonaisluku. Osoita, että kaikki polynomin f kertoimet ovat viidellä jaollisia.

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun välisarja

13. 11. 2012

1. Mitkä seuraavista väitteistä pätevät kaikilla terävillä kulmilla α?

a) $\sin^2\alpha + \tan^2\alpha = 1$ b) $\sin\alpha \le \alpha$
c) $\tan^2\alpha + \cos^2\alpha \ge 1$ d) $\tan\alpha\cos\alpha = \sin\alpha$

2. Suurin kokonaisluku, jolla eräät kaksi positiivista kokonaislukua ovat molemmat jaollisia on 4, ja 24 on pienin positiivinen kokonaisluku, joka on jaollinen molemmilla luvuilla. Lukujen summa voi olla

a) 20 b) 24 c) 28 d) 36

3. Useista pikkukuutioista, joiden särmien pituudet ovat 1, 2 ja 3, kasataan suuri kuutio, jonka särmän pituus on 5 (ja joka ei ole sisältä ontto). Tällöin:

a) Kaikkia pikkukuutiotyyppejä ei välttämättä tarvita kasaamisessa.
b) Pikkukuutioita tarvitaan vähintään 50 suuren kuution rakentamiseen.
c) Suuren kuution pinnasta ei voi välttämättä päätellä, onko kasaamisessa käytetty pikkukuutioita vähemmän vai enemmän kuin 100.
d) Käytettyjen pikkukuutioiden yhteispinta-ala on pariton kokonaisluku.

4. Olkoon f toisen asteen polynomi, jolla on kokonaislukukertoimet. Lisäksi $f(k)$ on viidellä jaollinen, kun k on kokonaisluku. Osoita, että kaikki polynomin f kertoimet ovat viidellä jaollisia.

5. Ympyrän halkaisijan AB jatkeelta pisteestä C (ympyrän ulkopuolelta) piirretään ympyrälle tangentti, joka sivuaa ympyrää pisteessä N. Kulman $\sphericalangle ACN$ puolittaja leikkaa janan AN pisteessä P ja janan NB pisteessä Q. Osoita, että $|PN| = |NQ|$.

6. Mikä on suurin n, jolla seuraava on mahdollista: $n \times n$-ruudukon jokainen ruutu voidaan värittää punaiseksi tai siniseksi niin, että jos valitaan mitkä tahansa kaksi ruuturiviä ja mitkä tahansa kaksi ruutusaraketta, niin näiden risteyskohdissa olevat neljä ruutua eivät ole kaikki samanvärisiä?

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun avoin sarja

13. 11. 2012

1. Määritellään reaalilukujen laskutoimitus $*$ seuraavasti: $a * b = a^2 + b^2 - ab$. Ratkaise yhtälö
$$(x * x) * 1 = x * (x * 1).$$

2. Olli ja Liisa pelaavat seuraavaa peliä 2012:lla pelimerkillä, jotka ovat yhdessä läjässä. He ottavat vuorotellen läjästä yhden, kaksi tai kolme pelimerkkiä. Viimeisen pelimerkin saanut voittaa. Liisa aloittaa. Selvitä, voiko jompikumpi pelaaja aina varmistaa voiton itselleen.

3. Viekas hallitsija lupaa puolet valtakunnastaan seuraavanlaista työpanosta vastaan: Jokaista shakkipelin 64 ruutua kohti työntekijän pitää työskennellä tietty määrä kokonaisia päiviä. Ensimmäisen ruudun kohdalla työ kestää tasan päivän, ja kunkin seuraavan ruudun kohdalla työpäivien määrä kaksinkertaistuu edelliseen ruutuun verrattuna. Minä viikonpäivänä työ loppuu, kun työ alkaa eräänä maanantaina ja jatkuu joka päivä ilman viikonloppuvapaitakaan?

4. Terävän kulman $\sphericalangle A$ puolittajalta valitaan piste P ja toiselta kyljeltä piste B. BP:n jatke leikkaa toisen kyljen pisteessä C Osoita, että lausekkeen
$$\frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|AC|}$$
arvo ei riipu pisteen B valinnasta, kun P pidetään paikallaan.

Työaikaa on **120 minuuttia.**
Tee kukin tehtävä omalle konseptiarkin sivulleen.
Merkitse koepaperiin selvästi tekstaten oma nimesi ja yhteystietosi (koulun nimi, kotiosoite ja sähköpostiosoite).