

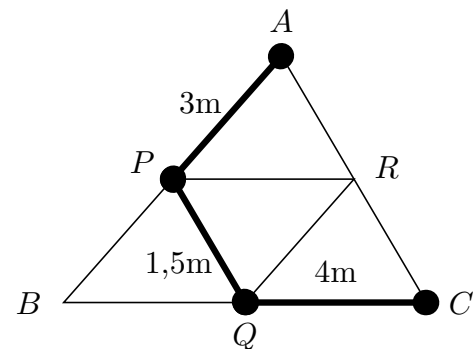
11. 11.
2014
  
**Lukion matematiikkakilpailun  
alkukilpailun perussarja**

*Tehtäviä on kahdella sivulla; kuusi ensimmäistä tehtävää on monivalintatehtäviä, joissa on 0–4 oikeata vastausta.*

1. Juna kulkee Ankkalinnasta Hanhivaaraan. Matka-ajasta 5 % kuluu pysähdyksiin. Matka-aikaa halutaan lyhentää 10 %, mutta pysähdyksiin kuluva aikaa ei voida muuttaa. Junan nopeutta on tällöin lisättävä ("noin" tarkoittaa prosenttiyksikön tarkkuudella)

- a) 10 %                      b) alle 15 %                      c) noin 12 %                      d) noin 15 %

2. Metallitangosta valmistetaan kolmionmuotoinen kehikko  $ABC$ . Kehikkoa vahvistetaan yhdistämällä kolmion sivujen keskipisteet toisiinsa tangoilla. Oheiseen kuvaan, joka ei ehkä ole mittatarkka, on merkitty muutamia tankojen tai niiden osien pituuksia vahvennetuilla janoilla. Kuinka monta metriä tankoa rakennelmaan on käytetty?



- a) ainakin 24 m                      b) ainakin 25 m                      c) ainakin 26 m                      d) ainakin 27 m

3. Onko olemassa positiivisia reaalilukuja  $a$  ja  $b$ , joille on voimassa

- a)  $2 : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq \sqrt{ab}$                       b)  $2 : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) > \sqrt{ab}$   
c)  $2 : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \sqrt{ab}$                       d)  $2 : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) < \sqrt{ab}$

4. Tarkastellaan luonnollista lukua

$$\begin{aligned}
 N = & 97\ 531\ 097\ 531\ 097\ 531\ 097\ 531\ 097\ 531\ 097\ 531\ 097\ 531\ 097\ 531\ 097\ 531\ 097\ 531\ 097\ 531 \\
 & 097\ 531\ 097\ 531\ 097\ 531\ 097\ 531\ 097\ 531\ 097\ 531\ 097\ 531\ 097\ 531\ 097\ 531\ 097\ 531\ 097\ 531 \\
 & 097\ 531\ 097\ 531\ 097\ 531\ 097\ 531\ 097\ 531\ 097\ 531\ 097\ 531,
 \end{aligned}$$

jossa esiintyvät parittomat numerot laskevassa järjestyksessä 25 kertaan sekä välissä nollat. Tämä luku  $N$  on jaollinen kokonaisluvulla

- a) 9                                      b) 5                                      c) 3                                      d) 11

5. Suomessa lyödään 5, 10, 20 ja 50 sentin kolikkoja. Kuinka monella tavalla voi maksaa yhden euron laskun näitä kolikkoja käyttämällä?

- a) alle 45:llä      b) alle 50:llä      c) 50:llä      d) yli 50:llä

6. Polynomin  $(3x - 1)^7$  voi purkaa muotoon

$$a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

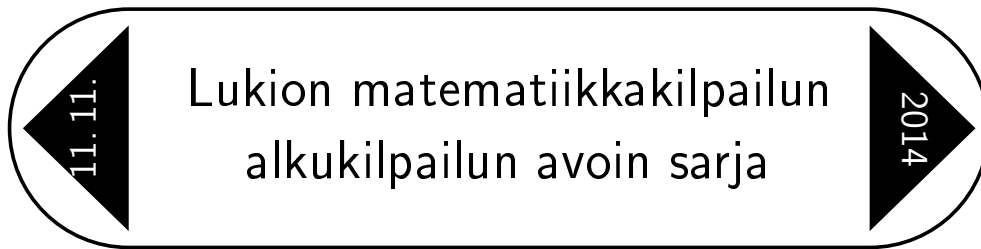
Kuinka suuri on  $a_7 + a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1$ ?

- a) pariton      b) negatiivinen      c) 129      d) 0

7. Laske  $r$ -säteisen ympyrän sisään piirretyn säännöllisen kahdeksankulmion lävistäjien pituudet.

8. Olkoon  $n$  epänegatiivinen kokonaisluku. Kuinka monella tavalla henkilöt  $A$ ,  $B$  ja  $C$  voivat keskenään jakaa  $n$  samanlaista karamellia?





1. Oletetaan, että reaaliluvuille  $x$  ja  $y$  pätee  $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$ . Mitä arvoja  $x + y$  voi saada?
2. Oletetaan, että yksittäinen lentokoneen moottori vikaantuu lennon aikana todennäköisyydellä  $p$  ja eri moottorien vikaantuminen on toisistaan riippumatonta. Tiedetään, että kaksimoottorinen lentokone pystyy lentämään yhdellä moottorilla ja nelimoottorinen lentokone silloin, kun koneen molemmilla puolilla on ainakin yksi toimiva moottori. Millä  $p$ :n arvoilla kaksimoottorinen kone on turvallisempi kuin nelimoottorinen kone?
3. Tarkastellaan tasasivuista kolmiota  $ABC$ . Piste  $P$  sijaitkoon lyhyemmällä kolmion  $ABC$  ympäri piirretyn ympyrän kaarella  $AC$ . Osoita, että  $|PB| = |PA| + |PC|$ .
4. Laura ja Risto pelaavat seuraavaa peliä: Pöydällä on  $\ell \geq 2$  lautasta, jotka ovat alun perin tyhjiä. Jokaisen kierroksen aluksi Laura siirtää osan lautasista vasemmalle ja loput oikealle puolelleen. Risto valitsee jommankumman puolen lautaset ja lisää kullekin yhden rusinan; lisäksi hän tyhjentää toisen puolen lautaset. Laura voi päättää pelin tähän ja laskea hyväkseen yhden lautasen rusinat, tai muuten peli lähtee uudelle kierrokselle. Todista, että jos Risto pelaa parhaalla mahdollisella tavalla, niin Laura voi voittaa korkeintaan  $\ell - 1$  rusinaa.

---

Työaika on **120 minuuttia**.

Tee kukin tehtävä omalle konseptiarkin sivulleen.

Merkitse koepaperiin selvästi tekstaten oma nimesi ja yhteystietosi (koulun nimi, kotiosoite ja sähköpostiosoite).