

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailu 2015

Avoimen sarjan tehtävät ja niiden ratkaisuja

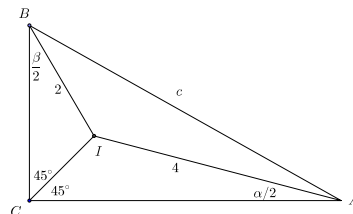
1. Olkoot a ja b peräkkäisiä kokonaislukuja, $c = ab$ ja $d = a^2 + b^2 + c^2$. a) Osoita, että \sqrt{d} on kokonaisluku. b) Mitä voit sanoa luvun \sqrt{d} parillisuudesta tai parittomuudesta?

Ratkaisu. Voidaan olettaa, että $b = a + 1$. Silloin $d = a^2 + (a + 1)^2 + (a(a + 1))^2 = a^2 + a^2 + 2a + 1 + a^4 + 2a^3 + a^2 = a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1$. Toisaalta $(a^2 + a + 1)^2 = a^4 + a^2 + 1 + 2a^3 + 2a^2 + 2a = a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1$. d on siis neliöluku ja $\sqrt{d} = a^2 + a + 1$.

($a^2 + a + 1 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$.) Koska $a^2 + a + 1 = a(a + 1) + 1$ ja joko a tai $a + 1$ on parillinen, niin $a(a + 1)$ on parillinen ja \sqrt{d} on pariton.

2. Suorakulmaisen kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipisteen etäisyydet kolmion terävien kulmien kärjistä ovat 2 ja 4. Laske hypotenuusan pituus (tarkka arvo).

1. *ratkaisu.* Olkoon suorakulmainen kolmio ABC , sen hypotenuusa $c = AB$, $\angle ABC = \beta$, $\angle CAB = \alpha$ ja I sisään piirretyn ympyrän keskipiste. I on kolmion kulmien puolittajien leikkauspiste. Sovelletaan (kolmion kulmasummasta välittömästi seuraavaa) tietoa, jonka mukaan kolmion kulman vieruskulma on kolmion muiden kulmien summa, kolmioihin CAI ja



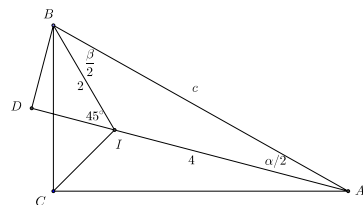
BCI . Saadaan $\angle AIB = \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) + \left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) = 90^\circ + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. Koska ABC on suorakulmainen, $\alpha + \beta = 90^\circ$. Siis $\angle AIB = 135^\circ$. Sovelletaan kosinilausetta kolmioon ABI . Koska $\cos 135^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, saadaan heti

$$c^2 = 4^2 + 2^2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 20 + 8\sqrt{2},$$

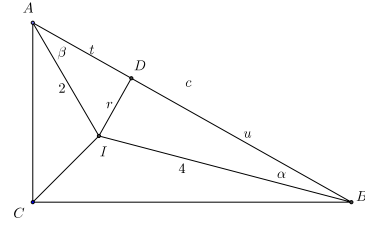
joten

$$c = 2\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}.$$

2. *ratkaisu.* Olkoon D se piste kulman $\angle CAB$ puolittajalla AI , jolle $BD \perp AI$. Kolmion ABI kulman $\angle BIA$ vieruskulmana $\angle BID = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 45^\circ$. Kolmio IBD on siis tasakylkinen suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa $BI = 2$. Siis $BD = DI = \sqrt{2}$. Suorakulmaisesta kolmiosta ABD saadaan Pythagoraan lauseen perusteella heti $c^2 = AB^2 = (4 + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 20 + 8\sqrt{2}$ ja $c = 2\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$.



3. ratkaisu. (Kalevi Lyyra) Olkoon $IA = 2$, $IB = 4$, D ABC :n sisäympyrän ja AB :n sivuamispiste, $AD = u$, $BD = t$, $\angle IAB = \alpha$ ja $\angle IBA = \beta$. Suorakulmaisista kolmioista AID ja BID saadaan $r = 2 \sin \alpha = 4 \sin \beta$. Siis $\sin \alpha = 2 \sin \beta$. Toisaalta $\alpha + \beta = 45^\circ$, joten $2 \sin \beta = \sin(45^\circ - \beta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \beta - \sin \beta)$. Tästä ratkaistaan



$$\tan \beta = \frac{1}{1 + 2\sqrt{2}} = \frac{r}{t}, \quad r = \frac{t}{1 + 2\sqrt{2}}.$$

Samoin johdetaan yhtälöt

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{r}{u}, \quad r = \frac{u\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}.$$

Kun Pythagoraan lausetta sovelletaan kolmioihin AID ja BID , saadaan

$$4 = r^2 + u^2 = u^2 \left(\frac{2}{(1 + \sqrt{2})^2} + 1 \right)$$

ja

$$16 = r^2 + t^2 = t^2 \left(\frac{1}{(1 + 2\sqrt{2})^2} + 1 \right).$$

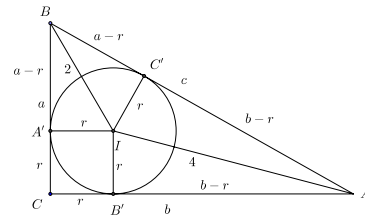
Tästä ratkaistaan

$$u = \frac{2(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}}, \quad t = \frac{2\sqrt{2}(1 + 2\sqrt{2})}{\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}},$$

ja edelleen

$$c = u + t = \frac{2(1 + \sqrt{2}) + 2\sqrt{2}(1 + 2\sqrt{2})}{\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}} = \frac{10 + 4\sqrt{2}}{\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}} = 2\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}.$$

4. ratkaisu. Olkoon $BC = a$, $CA = b$, ABC :n sisäympyrän säde r ja sisäympyrän ja kolmion sivujen BC , CA , AB sivuamispisteet A' , B' , C' . Koska $A'CB'I$ on neliö, $A'C = CB' = r$. Koska ympyrän tangenttien leikkauspisteestä sivuamispisteisiin piirretyt janat ovat yhtä pitkiä, on $BC' = BA' = a - r$ ja $C'A = B'B = b - r$. Siis $c = a + b - 2r$, joten



$$r = \frac{1}{2}(a + b - c), \quad a - r = \frac{1}{2}(a - b + c), \quad b - r = \frac{1}{2}(-a + b + c).$$

Suorakulmaisista kolmioista IAC' ja BIC' saadaan Pythagoraan lauseen nojalla

$$(-a + b + c)^2 + (a + b - c)^2 = 4 \cdot 4^2 = 64 \quad (1)$$

ja

$$(a - b + c)^2 + (a + b - c)^2 = 4 \cdot 2^2 = 16. \quad (2)$$

Kun otetaan huomioon, että ABC on suorakulmainen, joten $a^2 + b^2 = c^2$, niin (1) ja (2) sievenevät muotoihin

$$4c^2 - 4ac = 64, \quad 4c^2 - 4bc = 16.$$

Siis

$$a = \frac{c^2 - 16}{c}, \quad b = \frac{c^2 - 4}{c}$$

Kun nämä a :n ja b :n arvot sijoitetaan Pythagoraan yhtälöön $a^2 + b^2 = c^2$, saadaan c :lle yhtälö

$$c^4 - 40c^2 + 272 = 0,$$

josta ratkaistaan

$$c^2 = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 4 \cdot 272}}{2} = 20 \pm \sqrt{400 - 272} = 20 \pm \sqrt{128} = 20 \pm 8\sqrt{2}.$$

Kolmiosta ABI nähdään, että $c > 4$, joten c^2 :n lausekkeessa vain +-merkki kelpaa. Siis

$$c = 2\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}.$$

5. ratkaisu. Käytetään samoja merkintöjä kuin edellä. Pythagoraan lause sovellettuina suorakulmaisiin kolmioihin $AC'I$, $AB'I$, $BC'I$, $BA'I$ antaa $AC' = AB' = \sqrt{16 - r^2}$ ja $BC' = BA' = \sqrt{4 - r^2}$. Yhtälö $a^2 + b^2 = c^2$ on siis

$$\left(r + \sqrt{4 - r^2}\right)^2 + \left(r + \sqrt{16 - r^2}\right)^2 = \left(\sqrt{4 - r^2} + \sqrt{16 - r^2}\right)^2.$$

Kun tässä suoritetaan neliöön korotukset ja sievennetään, saadaan, että r toteuttaa yhtälön

$$r \left(\sqrt{4 - r^2} + \sqrt{16 - r^2}\right) = -r^2 + \sqrt{r^4 - 20r^2 + 64}.$$

Kun tämä korotetaan puolittain neliöön ja sievennetään, saadaan, että r toteuttaa yhtälön

$$r^2 \sqrt{r^4 - 20r^2 + 64} = r^4 - 10r^2 + 16.$$

Kun tämä vielä korotetaan puolittain neliöön ja sievennetään, saadaan r :n toteuttamaksi yhtälöksi

$$17r^4 - 80r^2 + 64 = 0.$$

Tämä on tuntemattoman r^2 toisen asteen yhtälö, jolle voidaan suoraan kirjoittaa ratkaisu

$$r^2 = \frac{80 \pm \sqrt{6400 - 17 \cdot 256}}{34} = \frac{40 \pm 16\sqrt{2}}{17}.$$

Koska r on kolmion BIC' lyhempi kateetti, on oltava $r^2 < 2$. Vain

$$r^2 = \frac{40 - 16\sqrt{2}}{17}$$

voi tulla kyseeseen. Nyt

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{4 - r^2} + \sqrt{16 - r^2} = \frac{\sqrt{28 + 16\sqrt{2}} + \sqrt{232 + 16\sqrt{2}}}{\sqrt{17}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{17}} \left(\sqrt{7 + 4\sqrt{2}} + \sqrt{58 + 4\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

– Tämä yllättävän erinäköinen ratkaisu on kuitenkin sama kuin edellisissä ratkaisuihin saatu $c = 2\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$, niin kuin selviää, kun korottaa molemmat lausekkeet neliöön ja tekee rutiinisievennykset.

6. ratkaisu. Käytetään samoja merkintöjä kuin 3. ratkaisussa. Koska $\sin \beta = 2 \sin \alpha = 2 \sin(45^\circ - \beta) = \sqrt{2}(\cos \beta - \sin \beta)$, saadaan $(1 + \sqrt{2}) \sin \beta = \sqrt{2} \cos \beta$, $(3 + 2\sqrt{2}) \sin^2 \beta = (3 + 2\sqrt{2})(1 - \cos^2 \beta) = 2 \cos^2 \beta$, josta ratkaistaan

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}}.$$

Kun vastaavasti lähdetään yhtälöstä $\sin \alpha = \frac{1}{2} \sin \beta = \frac{1}{2} \sin(45^\circ - \alpha)$ ja tehdään samat operaatiot kuin edellä, tullaan yhtälöön

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}\sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}{2\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}}.$$

Nyt

$$c = 2 \cos \alpha + 4 \cos \beta = \frac{2 \left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{18 + 8\sqrt{2}} \right)}{\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}}.$$

Tämä jälleen aivan erinäköinen lauseke on kuitenkin sama kuin aikaisemmissa ratkaisuihin saatu c :n arvo.

3. On annettuna 41 luvun joukko A . Tiedetään, että näistä jokaisen 21:n luvun summa on suurempi kuin muiden 20:n luvun summa. Montako negatiivista lukua joukossa A enintään voi olla?

1. ratkaisu. Olkoon x mielivaltainen joukon A alkio. Jaetaan joukon $A \setminus \{x\}$ 40 alkioita kahdeksi 20-alkioiseksi joukoksi. Olkoot näiden joukkojen alkioiden summat S_1 ja S_2 . Tehtävän ehdon perusteella $S_1 + x > S_2$ ja $S_2 + x > S_1$. Edellisestä epäyhtälöstä seuraa $x > S_2 - S_1$ ja jälkimmäisestä $x > S_1 - S_2$. Siis $x > |S_1 - S_2| \geq 0$. Jokainen A :n alkio on siis positiivinen luku, joten negatiivisia lukuja A :ssa ei ole.

2. *ratkaisu.* A on joukko, joten sen alkiot ovat eri lukuja. Kirjoitetaan ne suuruusjärjestykseen $x_1 < x_2 < \dots < x_{41}$. Jos joukossa A on negatiivisia lukuja, niin $x_1 < 0$. Silloin

$$\sum_{k=22}^{41} x_k < \sum_{k=1}^{21} x_k < \sum_{k=2}^{21} x_k < \sum_{k=22}^{41} x_k.$$

Tämä ei ole mahdollista, joten joukossa A ei ole negatiivisia lukuja.

4. Käytössä on kolme kirjainta A , B ja C . Näistä voidaan muodostaa esimerkiksi neljän kirjaimen merkkijono $ABBA$. Kuinka monta merkkijonoa, joissa on n kirjainta ja joissa on parillinen määrä A -kirjaimia, voidaan muodostaa, kun n on positiivinen kokonaisluku?

1. *ratkaisu.* Jonoja, joissa on $2k$, $k \geq 0$, A -kirjainta, on

$$\binom{n}{2k} 2^{n-2k}$$

kappaletta: paikat, joissa on A -kirjain voidaan valita yhtä monella tavalla kuin voidaan valita n -alkioisen joukon $2k$ -alkioinen osajoukko. B - ja C -kirjaimille jää $n - 2k$ paikkaa, ja jokaiseen tällaiseen voidaan asettaa kumpi tahansa näistä kirjaimista, joten mahdollisuuksia on 2^{n-2k} . Kaikkiaan tehtävän mukaisia merkkijonoja on siis

$$2^n + \binom{n}{2} 2^{n-2} + \binom{n}{4} 2^{n-4} + \dots$$

kappaletta. Mutta summa saadaan kirjoitettua suljettuun muotoon, kun huomataan, että

$$\begin{aligned} 3^n &= (2 + 1)^n = 2^n + \binom{n}{1} 2^{n-1} + \binom{n}{2} 2^{n-2} + \binom{n}{3} 2^{n-3} + \binom{n}{4} 2^{n-4} + \dots, \\ 1 &= (2 - 1)^n = 2^n - \binom{n}{1} 2^{n-1} + \binom{n}{2} 2^{n-2} - \binom{n}{3} 2^{n-3} + \binom{n}{4} 2^{n-4} - \dots. \end{aligned}$$

Kun edelliset binomikehitelmät lasketaan yhteen, saadaan

$$3^n + 1 = 2 \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} 2^{n-2k}.$$

Tehtävässä kysytty lukumäärä on siis

$$\frac{1}{2}(3^n + 1).$$

2. *ratkaisu.* n -kirjaimisia sanoja on kaikkiaan 3^n kappaletta. Olkoon näistä S_n sellaisia, joissa on parillinen määrä A -kirjaimia ja T_n sellaisia, joissa on pariton määrä A -kirjaimia. Tarkastellaan sanoja, joissa on parillinen määrä A -kirjaimia. Jos sanan viimeinen kirjain on A , sen $(n - 1)$:n ensimmäisen kirjaimien joukossa on pariton määrä A -kirjaimia ja jos

viimeinen kirjain on B tai C , sen $(n - 1)$:n ensimmäisen kirjaimen joukossa on parillinen määrä A -kirjaimia. Tästä seuraa

$$S_n = T_{n-1} + 2S_{n-1}. \quad (1)$$

Vastaavasti tarkastelemalla sanoja, joissa on pariton määrä \mathbf{A} -kirjaimia, tullaan yhtälöön

$$T_n = S_{n-1} + 2T_{n-1}. \quad (2)$$

Kun yhtälöt (1) ja (2) vähennetään toisistaan, saadaan

$$S_n - T_n = S_{n-1} - T_{n-1}. \quad (3)$$

Nyt $S_1 = 2$ ja $T_1 = 1$ (parillinen määrä A -kirjaimia on sanoissa B ja C , pariton sanassa A) eli $S_1 - T_1 = 1$. Yhtälöstä (3) seuraa nyt yksinkertaisella induktiolla, että $S_n - T_n = 1$ kaikilla n . Koska $S_n + T_n = 3^n$, saadaan heti

$$S_n = \frac{1}{2}(3^n + 1).$$

3. ratkaisu. Pienillä n :n arvoilla tehdyt kokeilut antavat aiheen olettaa, että

$$S_n = \frac{1}{2}(3^n + 1)$$

ja

$$T_n = 3^n - S_n = \frac{1}{2}(3^n - 1).$$

Todistetaan tämä induktiolla. $S_1 = 2$ ja $T_1 = 1$. Oletetaan, että väite pätee n :n merkin pituisiin jonoihin. Jonot, joiden pituus on $n + 1$ merkkiä ja joissa on parillinen määrä A -kirjaimia, saadaan liittämällä n -pituisiin jonoihin, joissa on parillinen määrä A -kirjaimia, viimeiseksi merkiksi B tai C , tai sellaisiin, joissa on pariton määrä A -kirjaimia, viimeiseksi merkiksi A . Siis

$$S_{n+1} = 2S_n + T_n = 3^n + 1 + \frac{1}{2}(3^n - 1) = \frac{3}{2} \cdot 3^n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 1).$$

Induktioaskel on otettu ja todistus on valmis.