

Tehtäviä on kahdella sivulla; kuusi ensimmäistä tehtävää on monivalintatehtäviä, joissa on 0–4 oikeata vastausta. Laskimet eivät ole sallittuja.

1. Hiiri juoksee tasaisella nopeudella v liukuhihnan päällä hihnan päästä päähän ja takaisin. Liukuhihnan rullausnopeus u on pienempi kuin hiiren nopeus v . Hiiren todellinen matka-aika verrattuna siihen, että hihna ei liikkuisi

- a) on lyhyempi
- b) on pitempi
- c) on samansuuruinen
- d) ei ole selvitetävissä annettujen tietojen perusteella.

2. Mikä on avoimen välin $]1, 2[$ pienin reaaliluku?

- a) 1.
- b) Sellaista ei ole olemassa.
- c) $1 + 10^{-99}$.
- d) Mikään vaihtoehdoista a, b tai c ei ole oikein.

3. Neliö, jonka sivu on a , jaetaan lävistäjän suuntaisella suoralla kahteen osaan. Osien pinta-alojen suhde on $1 : 4$. Neliön sisään jäävän suoran osan pituus on

- a) $\frac{a}{2}$
- b) $\frac{a}{\sqrt{2}}$
- c) $\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{5}}$
- d) $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.

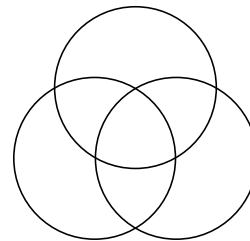
4. Määritellään jono x_0, x_1, x_2, \dots asettamalla $x_0 = 2015$ ja $x_n = (x_{n-1})^2 + 1$, kun n on positiivinen kokonaisluku. Mitä voidaan sanoa kokonaisluvun x_{2015} viimeisestä numerosta?

- a) Se on 2.
- b) Se on 7.
- c) Se on parillinen.
- d) Se on viidellä jaollinen.

5. Lauseke $(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)$ on kaikilla reaalilukujen a , b ja c arvoilla sama kuin

- a) $(a^2 - (b - c)^2)(-a + b + c)$
- b) $(a + b - c)((a - b)^2 - c^2)$
- c) $-a^3 - b^3 - c^3 + a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b - 2abc$
- d) $4(ab^2 + ac^2 + ba^2 + bc^2 + ca^2 + cb^2 + abc) - (a + b + c)^3$.

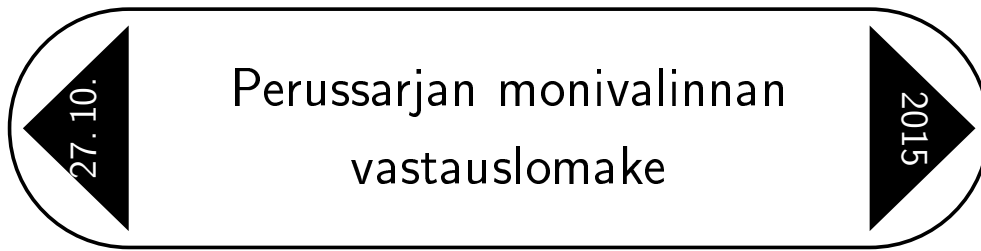
6. Kolme r -säteistä ympyrää sijaitsevat niin, että jokaisen kahden keskipisteet ovat kolmannella ympyrällä. Mitä voidaan sanoa näin syntyneen kuvion piirin (ulkoreunan) pituudesta p ja kuvion pinta-alasta A ?



- a) $A < p^2$.
- b) $p = 3\pi r$.
- c) $A > 6r^2$.
- d) $A = (2\pi + \sqrt{3})r^2$.

7. Määritä ne positiivisten kokonaislukujen parit, joiden summa on 162 ja suurin yhteinen tekijä 18.

8. Todista, että $a^{n+4} - a^n$ on jaollinen kymmenellä, kun n ja a ovat positiivisia kokonaislukuja.



Perussarjan monivalinnan
vastauslomake

Perussarjan monivalintatehtävien (6 ensimmäistä tehtävää) vastaukset palautetaan tällä lomakkeella; perinteisten tehtävien 7 ja 8 ratkaisut voi kirjoittaa erillisille vastausarkeille. Kussakin monivalintatehtävässä voi olla 0–4 oikeata vastausta. Merkitse vastaavaan ruutuun +, jos vastaus on oikea, ja –, jos vastaus on väärä. Oikeasta merkinnästä saa pisteen, väärästä tai tulkinnanvaraisesta merkinnästä saa nolla pistettä. Tehtävistä 7 ja 8 maksimipistemäärä on 6.

Työaika on 120 minuuttia. Kirjoita myös tehtävien 7 ja 8 vastauspapereihin selvästi tekstaten oma nimesi ja koulusi.

Nimi : _____

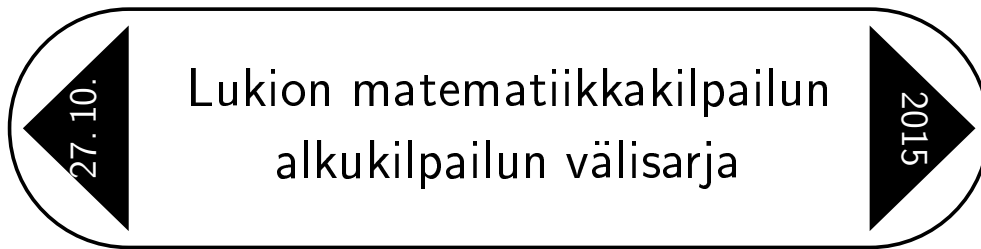
Koulu : _____

Kotiosoite : _____

Sähköposti : _____

a b c d

1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				



1. Neliö, jonka sivu on a , jaetaan lävistäjän suuntaisella suoralla kahteen osaan. Osien pinta-alojen suhde on $1 : 4$. Neliön sisään jäävän suoran osan pituus on

- a) $\frac{a}{2}$ b) $\frac{a}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{5}}$ d) $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.

2. Kuinka monella tavalla luku 2015 voidaan esittää muodossa $p + qrs$, missä p, q, r ja s ovat kaikki alkulukuja ja $p < q < r < s$?

- a) Ei yhdelläkään tavalla. b) Parittoman monella tavalla.
c) Parillisen monella tavalla. d) Korkeintaan kymmenellä eri tavalla.

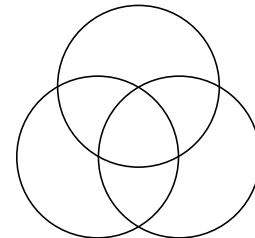
3. Olkoot $a, b, c \in [0, 1]$. Mikä on lausekkeen

$$ab + ac + bc + 1 - abc - a - b - c$$

suurin arvo?

- a) $1/2$ b) 1 c) $5/4$ d) $3/2$

4. Kolme r -säteistä ympyrää sijaitsevat niin, että jokaisen kahden keskipisteet ovat kolmannella ympyrällä. Määritä näin syntyneen kuvion piiri p ja kuvion pinta-ala A .



5. Olkoon $f: \mathbb{Z} \rightarrow \{-1, 1\}$ kuvaus, jolle $f(mn) = f(m)f(n)$, kun $m, n \in \mathbb{Z}$. Osoita, että on olemassa sellainen $a \in \mathbb{Z}$, että $f(a) = f(a + 1) = 1$.

6. Kuvaus $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on *kupera*, jos kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$ ja $t \in [0, 1]$ pätee

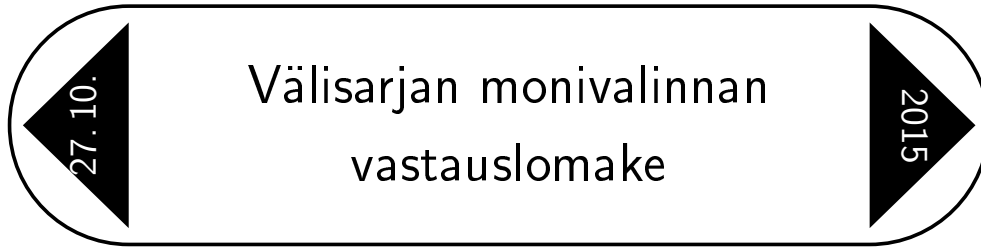
$$f(ta + (1 - t)b) \leq tf(a) + (1 - t)f(b).$$

a) Osoita, että kuperalle kuvaukselle f pätee

$$f(ta + (1 - t)b) + f((1 - t)a + tb) \leq f(a) + f(b),$$

kun $a, b \in \mathbb{R}$, $t \in [0, 1]$ ja $a < b$.

b) Tutki, päteekö epäyhtälö $f(2a - b) \leq 2f(a) - f(b)$ kaikille kuperille $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ja luvuille $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.



Välisarjan monivalintatehtävien (3 ensimmäistä tehtävää) vastaukset palautetaan tällä lomakkeella; perinteisten tehtävien 4–6 ratkaisut voi kirjoittaa erillisille vastausarkeille. Kussakin monivalintatehtävässä voi olla 0–4 oikeata vastausta. Merkitse vastaavaan ruutuun +, jos vastaus on oikea, ja –, jos vastaus on väärä. Oikeasta merkinnästä saa pisteen, väärästä tai tulkinnanvaraisesta merkinnästä saa nolla pistettä. Tehtävistä 4–6 maksimipistemäärä on 6.

Työaika on 120 minuuttia. **Laskimet eivät ole sallittuja.** Kirjoita myös tehtävien 4–6 vastauspapereihin selvästi tekstaten oma nimesi ja koulusi.

Nimi : _____

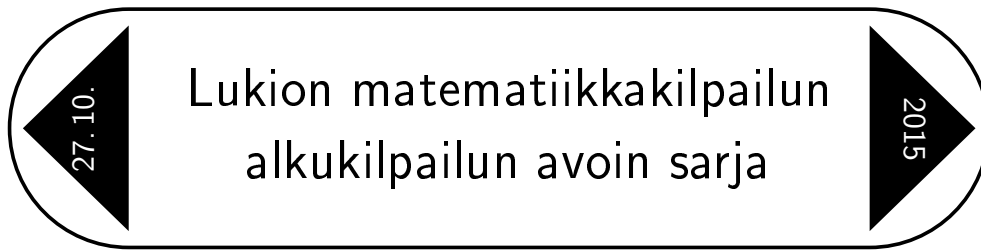
Koulu : _____

Kotiosoite : _____

Sähköposti : _____

a b c d

1.				
2.				
3.				



1. Olkoot a ja b peräkkäisiä kokonaislukuja, $c = ab$ ja $d = a^2 + b^2 + c^2$.
 - a) Osoita, että \sqrt{d} on kokonaisluku.
 - b) Mitä voit sanoa luvun \sqrt{d} parillisuudesta tai parittomuudesta?
2. Suorakulmaisen kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipisteen etäisyydet kolmion terävien kulmien kärjistä ovat 2 ja 4. Laske hypotenuusan pituus (tarkka arvo).
3. On annettuna 41 luvun joukko A . Tiedetään, että näistä jokaisen 21:n luvun summa on suurempi kuin muiden 20:n luvun summa. Montako negatiivista lukua joukossa A enintään voi olla?
4. Käytössä on kolme kirjainta A , B ja C . Näistä voidaan muodostaa esimerkiksi neljän kirjaimen merkkijono $ABBA$. Kuinka monta merkkijonoa, joissa on n kirjainta ja joissa on parillinen määrä A -kirjaimia, voidaan muodostaa, kun n on positiivinen kokonaisluku?

Työaika on **120 minuuttia**.

Laskimet eivät ole sallittuja.

Tee kukin tehtävä omalle konseptiarkin sivulleen.

Merkitse koepaperiin selvästi tekstaten oma nimesi ja yhteystietosi (koulun nimi, kotiosoite ja sähköpostiosoite).