



1. Mitkä kolmiot toteuttavat yhtälön

$$\frac{c^2 - a^2}{b} + \frac{b^2 - c^2}{a} = b - a,$$

kun a , b ja c ovat kolmion sivut?

2. Olkoon y positiivinen kokonaisluku, joka kirjoitetaan 9-kantaisessa lukujärjestelmässä pelkillä ykkösillä. Osoita, että y on *kolmioluku*, ts. jollakin positiivisella kokonaisluvulla n luku y on n pienimmän positiivisen kokonaisluvun summa.
3. Teräväkulmaisen kolmion yhden korkeusjanan kannasta lähtien piirretään normaalit kahta muuta sivua vastaan. Nämä normaalit kohtaavat toiset sivut pisteissä P ja Q . Osoita, että janan PQ pituus ei riipu siitä, mikä kolmesta korkeusjanasta valitaan.
4. Montako positiivisten kokonaislukujen a ja b ratkaisuparia (a, b) on olemassa yhtälölle

$$(4a - b)(4b - a) = 1770^n,$$

kun n on positiivinen kokonaisluku?

5. Laputan hallitsija määrää valtion kaupunkien välille rakennettavaksi junaverkoston, joka noudattaa seuraavia sääntöjä:

Yhtenäisyys: Kustakin kaupungista pääsee kuhunkin toiseen kaupunkiin junalla, mahdollisesti vaihtojen kautta.

N-kielto: Ei ole sellaisia neljää kaupunkia A , B , C ja D , että A :sta olisi suora yhteys B :hen, B :stä C :hen ja C :stä D :hen, mutta oikaiseminen tällä reitillä ei olisi mahdollista: A :sta ei pääsisi suoraan C :hen, B :stä ei pääsisi suoraan D :hen eikä A :sta D :hen.

Lisäksi suora lentolautasyhteys perustetaan täsmälleen niiden kaupunkiparien välille, joiden välillä ei ole suoraa junayhteyttä. Todista, että lentolautasverkosto ei ole yhtenäinen, kun kaupunkeja on useampia kuin yksi.

Kilpailuaikaa on 3 tuntia.

Vain kirjoitus- ja piirustusvälineiden käyttö on sallittu.

Tee kukin tehtävä omalle, nimelläsi varustetulle paperilleen.

Merkitse yhteen papereista selvästi myös

yhteystietosi (koulun nimi, kotiosoite ja sähköpostiosoite).