# Lukion matematiikkakilpailu loppukilpailu 2017, tehtävien ratkaisuja

**1.** Tehtävän mukaan
$$\frac{m}{n} = 22 + \frac{5}{n} = \frac{220}{10} + \frac{50}{10n}$$
ja, koska seuraavassa jakolaskun vaiheessa jaetaan edellisestä jaosta yli jääneitä 50:tä kymmenesosaa,
$$\frac{50}{n} = 4 + \frac{2}{n}.$$
Jälkimmäinen yhtälö antaa heti $n = 12$, ja kun tämä sijoitetaan ensimmäiseen yhtälöön, saadaan $m = 269$.

**2.** Tehtävän ehtojen perusteella
$$1 = (x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y) = 2 + 3xy,$$
joten $xy = -\frac{1}{3}$. Siis
$$1 = (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = x^2 + y^2 - \frac{2}{3}.$$
Tästä ratkaistaan $x^2 + y^2 = \frac{5}{3}$. Mutta nyt
$$\frac{25}{9} = \left(x^2 + y^2\right)^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = x^4 + y^4 + \frac{2}{9}.$$
Siis $x^4 + y^4 = \frac{23}{9}$.

**3.** Koska luku $x = 22220038^m - 22220038^n = 22220038^n\left(22220038^{m-n} - 1\right)$ päättyy kahdeksaan nollaan, se on jaollinen luvulla $10^8$ ja siis luvulla $2^8$. Sulkeissa oleva erotus on pariton, joten luvun $22220038^n$ on oltava jaollinen luvulla $2^8$. Mutta $22220038^n = 2^n \cdot 11110019^n$, ja koska jälkimmäinen potenssi on pariton, jaollisuus $2^8$:lla voi toteutua vain, jos $n \geq 8$. [Voi kysyä, onko sellaisia lukuja $m$ ja $n$, joille $x$ on jaollinen $10^8$:lla. Kun tarkastellaan lukuja $22220038^k$, $1 \leq k \leq 10^8 + 1$, niin jollain kahdella luvulla on välttämättä samat kahdeksan viimeistä numeroa. Niiden erotus kelpaa luvuksi $x$.]

**4.** [Tehtävän tekstistä oli jäänyt pois oletus $m > 1$.] Jompikumpi pelaajista voittaa aina. On mahdollista, että Akselilla on voittostrategia, jossa hänen ensimmäinen valintansa on $m$. Ellei näin ole, Elina voi valita jonkin $m$:n tekijän $k$ ensimmäiseksi valinnakseen, ja voittaa. Mutta nyt Akseli voikin ensimmäiseksi valinnakseen ottaa $k$:n ja pelata niin kuin Elina olisi pelannut voittaakseen. Akselilla on siis voittostrategia.

**5.** Piirretään $T$-keskinen ympyrä $A$:n kautta. Tangenttien leikkauspisteestä sivuamispisteisiin piirretyt janat ovat tunnetusti yhtä pitkät, joten $B$ on myös tällä ympyrällä. Koska $TAB$ on tasakylkinen kolmio, $\angle TAB = \angle TBA$. Olkoon $AP$ piirretyn ympyrän halkaisija. Piste $Q$ on ympyrällä $\Gamma$, jos $AQBP$ on jännenelikulmio. Tähän riittää, että $\angle APB$ ja kulman $\angle AQB$ vieruskulma eli $\angle BQX$ ovat yhtä suuret. Koska kulmat $\angle QBX = \angle YBX$ ja $\angle ABP$ ovat suoria, riittää, että osoitetaan kulmat $\angle PAB$ ja $\angle BXQ = \angle BXA$ yhtä suuriksi. Mutta $\angle BXA = \angle TBA$, koska $BT$ on tangentti, ja $\angle TBA = \angle TAB = \angle PAB$, koska $TAB$ on tasakylkinen kolmio. Väite on siis todistettu.