

# Lukion matematiikkakilpailu loppukilpailu 2017, tehtävien ratkaisuja

1. Tehtävän mukaan

$$\frac{m}{n} = 22 + \frac{5}{n} = \frac{220}{10} + \frac{50}{10n}$$

ja, koska seuraavassa jakolaskun vaiheessa jaetaan edellisestä jaosta yli jääneitä 50:tä kymmenesosaa,

$$\frac{50}{n} = 4 + \frac{2}{n}.$$

Jälkimmäinen yhtälö antaa heti  $n = 12$ , ja kun tämä sijoitetaan ensimmäiseen yhtälöön, saadaan  $m = 269$ .

2. Tehtävän ehtojen perusteella

$$1 = (x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = 2 + 3xy,$$

joten  $xy = -\frac{1}{3}$ . Siis

$$1 = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = x^2 + y^2 - \frac{2}{3}.$$

Tästä ratkaistaan  $x^2 + y^2 = \frac{5}{3}$ . Mutta nyt

$$\frac{25}{9} = (x^2 + y^2)^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = x^4 + y^4 + \frac{2}{9}.$$

Siis  $x^4 + y^4 = \frac{23}{9}$ .

3. Koska luku  $x = 22220038^m - 22220038^n = 22220038^n (22220038^{m-n} - 1)$  päättyy kahdeksaan nollaan, se on jaollinen luvulla  $10^8$  ja siis luvulla  $2^8$ . Sulkeissa oleva erotus on pariton, joten luvun  $22220038^n$  on oltava jaollinen luvulla  $2^8$ . Mutta  $22220038^n = 2^n \cdot 11110019^n$ , ja koska jälkimmäinen potenssi on pariton, jaollisuus  $2^8$ :lla voi toteutua vain, jos  $n \geq 8$ . [Voi kysyä, onko sellaisia lukuja  $m$  ja  $n$ , joille  $x$  on jaollinen  $10^8$ :lla. Kun tarkastellaan lukuja  $22220038^k$ ,  $1 \leq k \leq 10^8 + 1$ , niin jollain kahdella luvulla on välttämättä samat kahdeksan viimeistä numeroa. Niiden erotus kelpaa luvuksi  $x$ .]

4. [Tehtävän tekstistä oli jäänyt pois oletus  $m > 1$ .] Jompikumpi pelaajista voittaa aina. On mahdollista, että Akselilla on voittostrategia, jossa hänen ensimmäinen valintansa on  $m$ . Ellei näin ole, Elina voi valita jonkin  $m$ :n tekijän  $k$  ensimmäiseksi valinnakseen, ja voittaa. Mutta nyt Akseli voikin ensimmäiseksi valinnakseen ottaa  $k$ :n ja pelata niin kuin Elina olisi pelannut voittaakseen. Akselilla on siis voittostrategia.

5. Piirretään  $T$ -keskinen ympyrä  $A$ :n kautta. Tangenttien leikkauspisteestä sivuamispisteisiin piirretyt janat ovat tunnetusti yhtä pitkät, joten  $B$  on myös tällä ympyrällä. Koska  $TAB$  on tasakylkinen kolmio,  $\angle TAB = \angle TBA$ . Olkoon  $AP$  piirretyn ympyrän halkaisija. Piste  $Q$  on ympyrällä  $\Gamma$ , jos  $AQBP$  on jännelikulmio. Tähän riittää, että  $\angle APB$  ja kulman  $\angle AQB$  vieruskulma eli  $\angle BQX$  ovat yhtä suuret. Koska kulmat  $\angle QBX = \angle YBX$  ja  $\angle ABP$  ovat suoria, riittää, että osoitetaan kulmat  $\angle PAB$  ja  $\angle BXQ = \angle BXA$  yhtä suuriksi. Mutta  $\angle BXA = \angle TBA$ , koska  $BT$  on tangentti, ja  $\angle TBA = \angle TAB = \angle PAB$ , koska  $TAB$  on tasakylkinen kolmio. Väite on siis todistettu.

