



1. Ratkaise, mille luvuille  $x$  on voimassa

$$x(8\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) \leq 11\sqrt{1+x} - 16\sqrt{1-x},$$

kun  $0 < x \leq 1$ .

2. Kun  $x$  on reaaliluku, tarkoittaa  $\lfloor x \rfloor$  suurinta kokonaislukua  $n$ , jolle  $n \leq x$ . Esimerkiksi  $\lfloor 4,2 \rfloor = 4$ ,  $\lfloor \pi \rfloor = 3$  ja  $\lfloor 8 \rfloor = 8$ . Todista, että luku  $\left\lfloor (2 + \sqrt{5})^{2019} \right\rfloor$  ei ole alkuluku.
3. Olkoon  $ABCD$  ympyrän jännekuilu, jonka sivu  $AB$  on samalla ympyrän halkaisija. [Jännekuilu tarkoittaa nelikulmiota, jonka kärjet sijaitsevat ympyrän kehällä.] Janat  $AC$  ja  $BD$  leikkaavat pisteessä  $E$  ja janojen  $AD$  ja  $BC$  jatkeet pisteessä  $F$ . Jana  $EF$  leikkaa ympyrää pisteessä  $G$  ja janan  $EF$  jatke leikkaa halkaisijan  $AB$  pisteessä  $H$ . Osoita, että jos  $G$  on janan  $FH$  keskipiste, niin  $E$  on janan  $GH$  keskipiste.
4. Määritellään lukujono asettamalla

$$a_n = n^n + (n-1)^{n+1},$$

kun  $n$  on positiivinen kokonaisluku. Määritä kaikki ne positiiviset kokonaislukumodulot  $m$ , joissa tämä lukujono on lopulta jaksollinen, ts. on olemassa sellaiset positiiviset kokonaisluvut  $K$  ja  $s$ , että  $a_k \equiv a_{k+s} \pmod{m}$ , kun  $k \geq K$  on kokonaisluku.

5. Opettajalla tiedetään olevan  $2^k$  omenaa jollakin  $k \in \mathbb{N}$ . Hän syö oppilaiden nähden yhden omenoista itse ja jakaa loput oppilailleen A ja B niin, ettei kumpikaan näe, kuinka monta toinen saa. A ja B eivät tunne lukua  $k$ . He ovat kuitenkin ennalta valinneet huomaamattoman tavan paljastaa yhdellä ainoalla merkillä toisilleen jotakin omenoiden lukumäärästä: Kumpikin raapii päätään oikealla, vasemmalla tai molemmilla käsillään saamiensa omenoiden lukumäärän mukaan. Opettajan ällistyksiksi oppilaat tietävätkin aina, kumpi sai omenoita enemmän tai että opettaja söi ainoan omenan itse. Miten tämä on mahdollista?

---

Työaika on **3 tuntia**.

**Laskimet ja taulukkokirjat eivät ole sallittuja.**

Tee kukin tehtävä omalle konseptiarkin sivulle.

Merkitse koepaperiin selvästi tekstaten oma nimesi ja yhteystietosi (koulun nimi, kotiosoite ja sähköpostiosoite).