

12. pohjoismainen kilpailu 2.4.1998

1. Määritä kaikki rationaalilukujen joukossa määritellyt rationaalilukuarvoiset funktiot f , jotka toteuttavat yhtälön $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$ kaikilla rationaaliluvuilla x ja y .
2. Olkoot C_1 ja C_2 kaksi ympyrää, jotka leikkaavat toisensa pisteissä A ja B . Olkoon M_1 C_1 :n keskipiste ja M_2 C_2 :n keskipiste. Olkoon P janan AB jokin sellainen piste, että $|AP| \neq |BP|$ ja $P \neq A$, $P \neq B$. Piirretään P :n kautta M_1P :tä vastaan kohtisuora suora ja merkitään sen ja C_1 :n leikkauspisteitä C :llä ja D :llä. Piirretään samoin P :n kautta M_2P :tä vastaan kohtisuora suora ja merkitään sen ja C_2 :n leikkauspisteitä E :llä ja F :llä. Osoita, että C , D , E ja F ovat erään suorakaiteen kärkipisteet.
3. (a) Millä positiivisilla luvuilla n on olemassa jono x_1, x_2, \dots, x_n , joka sisältää kunkin luvuista $1, 2, \dots, n$ tasan kerran ja jolle $x_1 + x_2 + \dots + x_k$ on jaollinen k :lla jokaisella $k = 1, 2, \dots, n$?
(b) Onko olemassa päättymätön jono x_1, x_2, x_3, \dots , joka sisältää jokaisen positiivisen kokonaisluvun tasan kerran ja jolle $x_1 + x_2 + \dots + x_k$ on jaollinen k :lla kaikilla positiivisilla luvuilla k ?
4. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Laske sellaisten lukujen $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ lukumäärä, joille $\binom{n}{k}$ on pariton. Osoita, että tämä luku on kakkosen potenssi, ts. muotoa 2^p jollakin ei-negatiivisella luvulla p .