12. pohjoismainen kilpailu 2. 4. 1998

1. Määritä kaikki rationaalilukujen joukossa määritellyt rationaalilukuarvoiset funktiot f, jotka toteuttavat yhtälön $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y)$ kaikilla rationaaliluvuilla x ja y.

2. Olkoot C_1 ja C_2 kaksi ympyrää, jotka leikkaavat toisensa pisteissä A ja B. Olkoon M_1 C_1:n keskipiste ja M_2 C_2:n keskipiste. Olkoon P janan AB jokin sellainen piste, että $|AP| \neq |BP|$ ja $P \neq A$, $P \neq B$. Piirretään P:n kautta M_1P:tä vastaan kohtisuora suora ja merkitään sen ja C_1:n leikkauspisteitä C:llä ja D:llä. Piirretään samoin P:n kautta M_2P:tä vastaan kohtisuora suora ja merkitään sen ja C_2:n leikkauspisteitä E:llä ja F:llä. Osoita, että C, D, E ja F ovat erään suorakaiteen kärkipisteet.

3. (a) Millä positiivisilla luvuilla n on olemassa jono x_1, x_2, $\ldots$, x_n, joka sisältää kunkin luvuista $1, 2, \ldots, n$ tasan kerran ja jolle $x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ on jaollinen k:lla jokaisella $k = 1, 2, \ldots, n$?

(b) Onko olemassa päättymätön jono $x_1, x_2, x_3, \ldots$, joka sisältää jokaisen positiivisen kokonaisluvun tasan kerran ja jolle $x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ on jaollinen k:lla kaikilla positiivisilla luvuilla k?

4. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Laske sellaisten lukujen $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ lukumäärä, joille $\binom{n}{k}$ on pariton. Osoita, että tämä luku on kakkosen potenssi, ts. muotoa 2^p jollakin ei-negatiivisella luvulla p.